目　录

第一章　绪论

§1.1　飞行力学研究的内容

§1.1.1　飞行力学学科的定义和作用

1. 飞行力学学科的定义

飞行力学学科的定义有不同的说法，最一般的说法是飞行力学是研究飞行器运动规律的学科，是应用力学的一个新分支。它是按照力学的基本原理结合具体对象——飞行器来分析、研究在有控制或无控制情况下飞行器运动特性的一门学科。

首先考虑一下“飞行”这个词。飞行一词定义为穿过流体介质和真空的运动，而“飞行器”一词是指由某种方式联结在一起的任一飞行的物体。这样定义飞行和飞行器，则弹丸是最简单的飞行器，可视为一个单一的理想刚体。而一架飞机可视为复杂的飞行器，它包含一个机体主体、旋转部分（喷气发动机）、操纵部分和液体部分。

按上述飞行器的定义，飞行器可分为弹丸、飞机（又分为各种飞机，如直升飞机、歼击机、轰炸机、民用飞机等）、导弹（又细分为各种类型的导弹，如弹道导弹、战术导弹、地空导弹、巡航导弹等）和航天器（又细分为卫星、飞船、航天飞机、星际探测器等）。相应地就有外弹道学、飞机飞行力学、导弹飞行力学和航天器飞行力学。也可叫飞机飞行动力学、导弹飞行动力学、航天器飞行动力学，在本书中飞行力学和飞行动力学无区别，只是

习惯问题。但不管飞行器种类多么复杂，除了弹丸的外弹道学外，可以统称上述各种飞行力学为飞行器飞行力学。

从力学观点来看，飞行器飞行力学与理论力学中的质点系动力学并无本质的区别。理论力学给出一般力学对象作机械运动所应遵循的普遍规律和描述其运动的微分方程。而飞行器的运动只是其受的约束和外力性质方面存在某些特点，例如飞行器一般在三维空间内运动；飞行器所受的外力与运动状态、飞行器构造及变形等有关，如在大气层内飞行时的空气动力、喷气发动机的推力与飞行状态有关；此外对有控飞行器而言，人们可以通过控制改变飞行器的受力情况，进而改变它的运动规律。所以飞行力学是根据力学的普遍规律，深入分析飞行器这一特定对象作机械运动时的特殊规律，建立描述其运动的微分方程，揭示飞行器运动的客观规律，并运用这些规律来解决工程实际问题。

因为飞行器的运动与飞行器所受的空气动力、发动机推力、飞行器弹性变形、改变其运动规律的控制力有密切关系，所以飞行力学的发展很自然地与相应的学科发生了联系。这些学科包括：空气动力学、结构力学、推进技术、现代控制工程、经典力学和应用数学。电子计算机的发展，又为飞行力学研究提供了有效和快速的手段，促进了飞行仿真技术的发展，所有这些，大大的丰富了飞行器飞行力学的研究内容。

随着航空航天技术的进步，飞行力学已经不单纯是一个力学学科的分支，它与控制发生密不可分的联系。因此也可这样来定义飞行力学：

飞行力学是研究飞行器运动和引起这一运动的作用力之间相互关系的学科。它与飞行器的工程设计和实际应用有非常密切的关系。飞行力学是型号设计、飞行器性能和使用条件、武器系统的可靠性、精度、攻防对抗、飞行仿真、飞行试验和战斗使用的理论基础。它已发展成为一门多学科交叉的综合性的学科。飞行

力学不仅涉及到刚体力学、弹性力学和空气动力学方面的广泛知识，而且还要应用控制工程、系统工程、生物力学、计算机科学和数理统计学科的最新成果。从广义上来讲，可以认为飞行力学是研究飞行器在气动力、惯性力、弹性力和控制力作用下飞行器运动规律以及这四种力之间相互关系的学科。也有人简单的定义飞行力学是研究飞行器运动规律及其伴随发生现象的学科。为了突出控制对飞行力学的作用也可以定义飞行力学是一门研究飞行器运动、控制以及外力相互作用的技术学科。

由于飞行器是一个复杂的系统，描述其运动的微分方程组十分复杂。如果不进行适当的简化，研究问题十分不方便，根据飞行器运动特点，在工程上常将飞行器的运动分成质心运动和绕质心运动两部分进行研究，相应地各种飞行器飞行力学也分为两部分来研究，但名称各异。

如飞机飞行力学将分析质心运动规律，确定飞机基本飞行性能、续航性能、机动性能、起落性能和设计合理的飞行剖面称为飞机飞行性能计算。而将研究飞机绕质心运动称为飞机飞行动力学——飞机的稳定性和操纵性。它着重分析在外界扰动和操纵作用下，飞机（刚体、质点系）的运动特性，即所谓飞机的飞行品质。包括如何实现各种平衡飞行；平衡飞行状态受外界扰动后所呈现的运动稳定性；以及飞机对于控制的反应等。

导弹飞行力学将分析质心运动规律的学科称为弹道学，此时将导弹运动看成可控制质点的运动，即假定控制系统工作是理想的，导弹的质量集中在质心上，在飞行的任一瞬间作用在导弹上所有外力的合力矩为零，即瞬时平衡假设。这样，研究作用在导弹上的力和运动之间的关系，就可以求出质心运动轨迹，得到飞行速度、位置、过载等飞行参数。而将研究绕质心运动规律的学科称为导弹动态特性，也有其它称呼，如导弹姿态动力学、弹体稳定性和操纵性等。此时将导弹当作质点系来研究其运动情况，不

仅要考虑作用在质心上的力，而且主要考虑绕质心作用的力矩，并把导弹看成为控制系统的一个环节——控制对象，研究它的动态特性，即在干扰作用下，能否保持原来的飞行状态，在操纵机构作用下，导弹改变飞行状态的能力如何，也就是研究稳定性与操纵性问题。因此导弹的动态分析也可称为导弹质点系动力学。导弹的动态特性如果只考虑导弹弹体本身的动态特性，认为舵固定或者以某种形式输入看飞行器运动参数变化称为弹体的动态特性或弹体的稳定性和操纵性。如果考虑控制系统工作，研究导弹对干扰的反应和有误差输入时的响应称为导弹的动态特性或导弹的稳定性和操纵性，此时更多的是分析其落点精度或命中点精度，即精度分析。

航天器飞行动力学还有其它名称，如航天器运动理论、航天动力学，且更多的是用航天动力学。航天动力学称研究航天器质心运动部分为轨道动力学或轨道力学，主要研究内容有轨道确定、轨道摄动、轨道设计及优化、轨道测量、变轨控制及轨道机动、轨道保持、交会对接、再入和着陆轨道。而将研究绕质心运动部分称为航天器姿态动力学，实际上也可以称为航天器稳定性和操纵性，主要研究内容有姿态确定、姿态保持和姿态控制等。在航天动力学和控制书刊中有自己一套术语：轨道控制和姿态控制，简称轨控和姿控。姿态控制是对航天器绕其质心的转动角和转动角速度的控制，而轨道控制是对航天器质心位置和速度的控制。轨道控制又可分为导航和制导两部分，导航的任务是确定航天器在飞行轨迹上的位置和速度。制导的任务是按一定的制导规律控制航天器按要求的飞行轨迹运动。

2. 飞行力学的作用

飞行力学是研究飞行器运动规律的学科。它与飞行器的工程设计和实际应用有着非常密切的关系。

①飞行力学是型号设计的重要理论基础；

②飞行力学决定飞行器的飞行性能、使用条件。与飞行器的总体设计、制导和控制系统设计、结构设计有密切的关系。是新型号设计和改进飞行器性能的关键技术之一；

③飞行力学是研究飞行器的可靠性、精度、攻防对抗、作战效能和飞行规划的理论基础；

④飞行力学是飞行器CAD、飞行仿真和飞行试验的理论基础；

⑤飞行力学是研究飞行器作为武器时战斗使用问题的理论基础。

关于飞行力学的作用，中国科学院和中国工程院院士顾诵芬总结为：飞行器能否达到预期的战术技术性能、能否易于操作和安全使用，其评定最直接的手段是靠飞行力学的研究。

飞行力学与其它学科的关系和作用如图1-1所示。

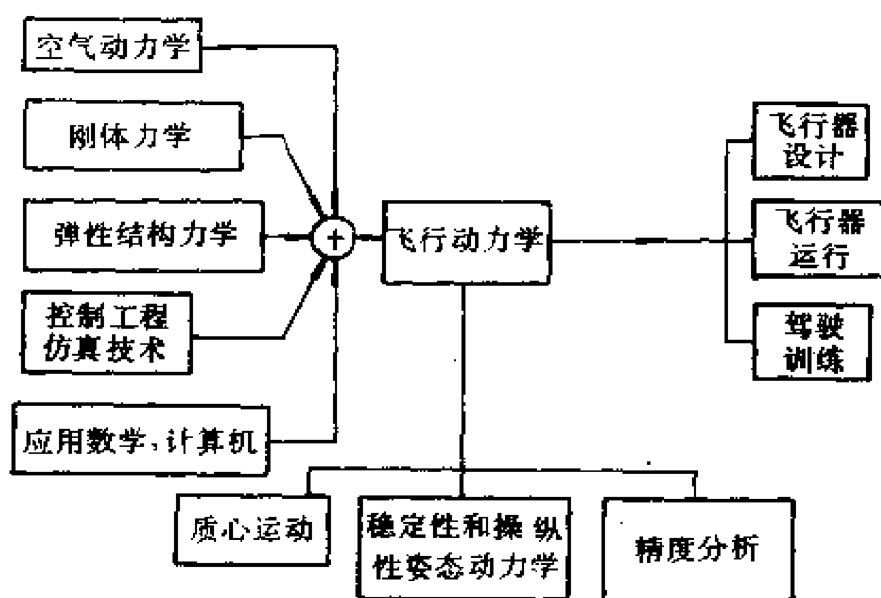
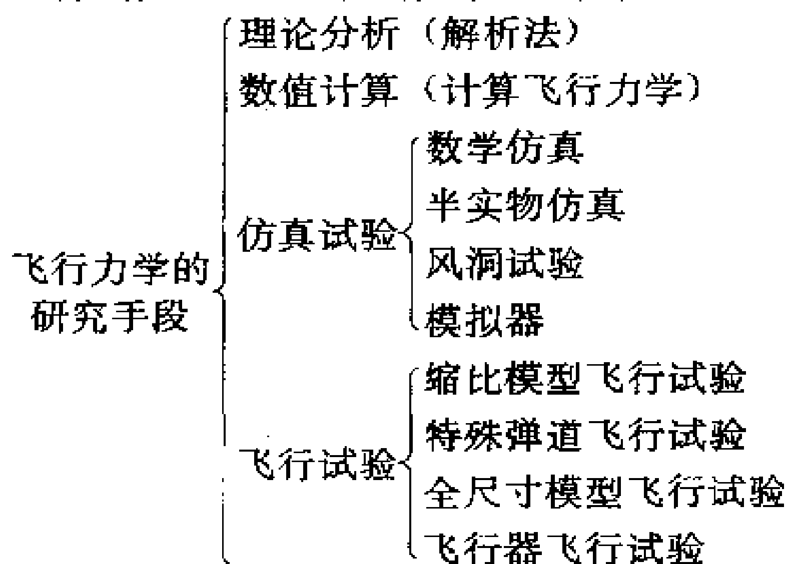


图1-1　学科关系方块图

§1.1.2 飞行力学的主要研究手段

飞行力学在解决飞行器设计、运行和人员训练方面所用的研究手段归纳起来有四种：理论分析（解析法）、数值计算、仿真试验和飞行试验。以上四种研究手段细分如下：



理论分析所用的理论除理论力学外，主要的是应用数学中的系统理论，特别是其中的随机过程和最佳理论。

数值计算这一研究手段随着计算机技术的发展，得到了迅速的发展，甚至有人称之为计算飞行力学，它改变了人们过去为得到解析解而把问题加以简化的作法，因为目前计算速度可以使以前认为无法解决的优化弹道问题、系统设计问题变成十分简单的事。

计算技术和仿真技术的发展为飞行器飞行力学提供了强有力的研究和设计手段。专用数字仿真机（美国的AD-100，中国银河Ⅱ仿真机）和高性能的通用机，使得在实验室里进行实时的六自由度的数学仿真和半实物仿真成为可能，改变过去主要依靠飞行试验的情况。利用计算机和仿真技术，飞行训练模拟器和工程模拟器为驾驶人员的培训、飞行品质的研究提供了研究工具。与此

同时，飞行器的飞行试验技术也有很大的发展，大容量的遥测设备、高精度遥测传感器和光测、雷测设备，以及自动化的数据处理技术，大大地提高了飞行器飞行数据的数量和质量，这就有可能在仿真系统中建立飞行器的飞行试验数据库，并在参数辨识和模型验证的基础上，完成飞行器的弹道重构，实现飞行试验和仿真试验的一体化，大大地改进飞行器系统的试验和鉴定工作。

§1.2 飞行器再入动力学和制导研究内容

§1.2.1 飞行器再入时的特点

1. 飞行力学的分类

飞行力学是研究飞行器运动规律的一门技术学科，是应用力学的一个分支。但随着航空航天科学技术的进步、飞行实践的进展，飞行器的种类越来越多，活动范围由大气层内进入太空，飞行速度由亚声速提高到第二宇宙速度，由于各种飞行器飞行力学所要研究的问题不完全相同；飞行环境也不同；所遇到的问题也不一样，飞行力学可以按不同的方法加以分类。按飞行器种类不同区分为飞机飞行力学、导弹飞行力学和航天器飞行力学三大类，而每一大类又按各自特点区分成若干种。飞机飞行力学又细分为飞机飞行动力学和直升飞机飞行动力学；导弹飞行力学又细分为战术导弹飞行力学、地空导弹飞行力学和弹道导弹飞行力学等；航天器飞行力学又细分航天器轨道动力学和卫星姿态动力学与控制等。

按飞行器的飞行环境可区分成只在大气层内飞行的飞行力学如大气飞行动力学和大气飞行器姿态动力学，和只在大气层外飞行的飞行力学，如宇宙飞行力学和人造地球卫星轨道力学。当然也有飞行力学既讨论大气层内飞行又讨论大气层外的飞行如远程

火箭弹道学。

按研究飞行器质心运动和绕质心运动加以分类，只研究飞行器质心运动而不研究绕质心运动如轨道动力学、飞机性能计算等，而只研究绕其质心运动的有飞行器姿态动力学。

随着导弹技术的发展，导弹的射程愈来愈远；对落点精度要求愈来愈高；而突防的要求愈来愈迫切，使得导弹的战斗部——弹头进入大气层后的环境，包括力学环境、热环境愈来愈恶劣，弹头再入飞行力学的问题愈来愈受到人们的重视。而随着航天技术的发展，航天活动已由无人发展到有人；对飞行过程中所受到的过载和热流要求愈来愈小；为了安全和便于寻找，对航天器着陆点精度的要求也越来越高；而着陆方式也由一次性的垂直着陆向多次重复使用的水平着陆方式发展，所有这些使航天器的返回着陆问题也愈来愈受到重视，形成了航天器再入动力学。

虽然弹头再入飞行力学和航天器再入动力学有着不完全相同的内容，但却有一个共同点，就是高速再入大气层带来的一系列问题。其中与再入弹道（轨道）设计、再入制导与控制方法研究有关的问题便形成了飞行力学的一个新分支——飞行器再入动力学。也有人称再入飞行器动力学。严格地讲，再入飞行器动力学还应包括再入飞行器发射段、自由飞行段运动规律研究，但习惯上再入飞行器动力学只研究其再入段的运动规律。在本书中两个名称通用，飞行器再入动力学是研究飞行器再入大气层的运动规律。包括如何保证进入大气层和进入大气层后的运动特性。

飞行器的含义很广，本书的飞行器指的是弹道导弹弹头和航天器，它可以包括弹头、机动弹头、卫星、飞船和航天飞机等。

按照广义飞行力学的定义，它研究的内容包括轨道设计、制导规律、控制方法、弹道仿真和精度分析。但目前有的书，如《航天器轨道动力学与控制》[25]一书称轨道动力学主要研究航天器在重力场和其它外力作用下的质点动力学问题，而航天器的轨

道控制则研究对航天器质心主动施加外力使之按需要改变运动轨道的理论和技术。另外《空间飞行器动力学和控制》也有类似的观点。同样对飞行力学中的姿态动力学，按广义的飞行力学定义，它已经包括姿态机动的内容，但目前常用的说法仍称为姿态动力学与控制，如《卫星姿态动力学与控制》、《大型航天器动力学与控制》。本书也可以定名为《飞行器再入动力学与控制》，但为了突出制导方法研究在飞行力学中的地位，且不过多涉及具体姿态控制系统的内容，所以本书定名为《飞行器再入动力学和制导》。

2. 弹道导弹弹头再入的特点

（1）弹头再入的特点

弹头是弹道导弹的有效载荷，用于毁伤目标。弹头的质量、威力、命中精度和突防能力等都是弹道导弹的主要战术技术指标。减小弹头的质量是提高导弹地面机动能力的关键，足够的突防能力是弹头突破防方拦截，保证到达目标上空，进行作战的前提，弹头的威力，很大程度上决定了导弹的打击能力。

弹头的种类可以按不同的原则加以分类。按飞行弹道分为惯性弹头和机动弹头。

惯性弹头又称无控弹头，它与弹体分离后，依赖它从弹体获得的能量作惯性飞行。飞行弹道主要取决于分离点弹头的位置、速度和弹道倾角。

机动弹头在与弹体分离后，可根据需要改变飞行弹道。通过改变飞行弹道来躲避敌方拦截的机动弹头叫躲避型机动弹头。不仅改变飞行弹道，而且通过末制导系统来提高命中精度的机动弹头叫精确型机动弹头或高级机动弹头。

不管是惯性弹头还是机动弹头，从飞行力学角度来看，都有如下特点：

①弹头再入环境异常恶劣

弹头超高速飞行，再入大气层后，造成高温、高压环境；噪

声、振动、冲击、过载都十分严重。总的看来，热、力环境比主动段严重几倍乃至百倍。

②攻防对抗使弹头技术复杂化

弹道导弹是进攻性武器，由于反导系统的出现和发展，弹头在飞行过程中可能遭到拦截，为避免拦截进行突防应采取多种手段，如反识别技术中的隐身技术、干扰技术、诱饵技术等，而反拦截技术中有采用多个弹头同时攻击一个目标，以饱和反导导弹的拦截能力。另外一种手段是进行机动躲避，弹头的机动弹道可降低反导武器杀伤概率。

除上述两点外，还有弹头系统难以在地面进行综合考核；弹头结构是多层复合结构；弹头设计制约条件多、协调面广等特点，使得弹头技术受到世界各国的重视。

就战略导弹弹头而言，它从笨重的单弹头发展成为小型化的分导式多弹头；从单一的弹道式弹头发展成为再入机动弹头；从惯性飞行发展到有精确末制导技术的飞行；从无突防能力的弹头发展到具有突防能力的弹头，从核弹头发展到具有核、常兼顾的弹头。目前战略导弹弹头的发展趋势归纳为小型化、高精度、强突防、全天候和机动飞行。

小型化需要解决滚转控制问题，这涉及到再入体的姿态动力学、稳定性分析等；提高再入精度涉及弹头性能参数优化选取、再入弹道设计等飞行力学问题；对于末端制导的高精度弹头，飞行力学还与再入制导控制技术密切相关；弹头具有较强突防能力不仅要研究攻防对抗中各种再入体、诱饵飞行程序轨道、空域分布、突防效果等，还需研究防方拦截器导引和飞行等问题；全天候性能要解决天气浸蚀对弹头飞行性能和弹道的影响；而机动飞行与机动弹道设计、制导和控制规律研究有着密切关系。上述这些问题无一不是飞行力学要致力研究的问题。

（2）弹头再入飞行力学在弹头研制中的地位和作用

弹头型号从可行性论证开始，经历方案论证、方案和模样设计、初样设计、试样设计、飞行试验，一直到产品定型交付使用的每一研制阶段，都有十分繁重的飞行力学专业的任务。

飞行力学参与弹头设计、使用的主要工作为：

①总体设计

· 性能计算与分析

· 参数优化选择

· 弹道设计计算

· 提供载荷、强度、防热、控制、突防、气动热、遥测及战斗部等专业的设计计算依据。

②飞行试验

· 试验弹道设计

· 飞行试验方案制定

· 有关测量要求

③结果分析

· 参数辨识与弹道重建

· 性能参数分析与评估

· 方案评判（弹头方案、试验方案）

④定型使用

· 性能鉴定（射程、精度、爆高、毁伤……）

· 射表/模型、装定参数、修正量

· 作战效能评估

3. 航天器再入大气层的特点

(1) 航天器再入的特点

航天器是指在地球大气层以外的宇宙空间基本上按照天体力学规律运行的各类飞行器。人造地球卫星、载人飞船、航天飞机、空间探测器等等都是航天器。航天器可分为再入式航天器和非再入式航天器两种。

再入式航天器指执行完任务后，再入大气层并在地球上着陆的航天器，如返回式卫星、载人飞船、航天飞机。但执行完任务后，由于受地球引力和大气阻力作用，按航天动力学规律逐渐下降，再入并通过地球大气层，最终硬着陆在地球的再入过程是天然的、无目的的和不受控的进入过程，称为陨落。如发射失败后的卫星的自然陨落。这不是本书研究的范畴。

航天器从环绕地球的运行轨道到返回地面要经历以下五个阶段：制动前的调姿段、制动段、过渡段、再入段和着陆段。而再入段是返回轨道中环境最恶劣和最复杂的一段。

航天器再入时的恶劣环境同战略导弹弹头再入时的恶劣环境基本相似，是由航天器高速再入带来的。所不同的弹头是再入时的再入角 $|\Theta_e|$ 较大，而航天器受减速过载、气动加热的限制 $|\Theta_e|$ 较小而已。

再入段是航天器返回过程最具有特征的飞行段。它是利用地球大气层这一天然资源，使航天器的返回部分（简称再入器）在再入过程中减速下降，并消耗它具有的巨大能量。再入器再入大气层后，受到与其飞行速度相反的气动阻力的作用而减速，此时再入器及其内部的航天员和有效载荷将受到巨大的减速过载作用。同时，再入器以很高的速度穿越大气层时，它对大气的强烈压缩和与之摩擦，使它的一部分能量转换为周围空气的热能，这部分热能又以对流和激波辐射传热的方式部分地传给再入器，使它表面的温度急剧升高而导致结构损坏。

（2）再入式航天器的分类

再入式航天器从最简单的弹道式返回的人造地球卫星，发展到今天的航天飞机轨道飞行器的水平着陆返回，可以说航天器有各种各样。可以按不同的方法加以分类，如用是否载人加以分类、按用途加以分类等。但最常用的分类是用航天器的返回部分（再入器）在再入段的气动力特征不同而加以分类。

按再入时气动力的特征不同，再入式航天器可以分为三类：

①弹道式再入航天器

②弹道 -升力式再入航天器

③升力式再入航天器

弹道式再入航天器返回大气层时，只产生阻力不产生升力，其升阻比为零。或者虽产生升力，但对升力的大小和方向不加以控制。经过离轨制动后，其返回轨道就确定了，受干扰后对弹道不加以控制，即再入轨道是不能进行调整的。

这类再入器的最大特点是下降速度快、再入弹道比较陡，由于减速很快，会产生很大的减速过载，同时会产生较大的热流，但再入飞行时间和航程短，总吸热量较小。

弹道式再入航天器由于再入轨道不能控制，其运行轨道的偏差、离轨制动时的偏差以及再入过程中的各种误差，对着陆点的散布有较大的影响。着陆点的散布达数十公里，有时达上百公里。弹道式再入航天器的例子如前苏联“东方”号载人飞船、美国的第一个载人飞船“水星”号和中国返回式卫星。

弹道—升力式再入航天器在设计时使其质心偏离再入器中心轴线一定的距离，再入大气层后，在配平状态下会产生一攻角，同时产生一定的升力，但通常升阻比较小，小于 0.5。此外，在再入过程中，通过对倾侧角 ν 的调整来改变其升力方向，从而在一定的程度上调整其再入轨道，使其具有一定的机动能力。有的文献称弹道—升力式再入航天器为半弹道式再入航天器。

这类航天器由于有升力，下降速度变缓，轨道平缓一些，可以减小再入过程中的过载峰值和热流峰值，但飞行时间和航程长，总吸热量增加。由于对再入轨道可以进行调整，其落点精度较弹道式再入航天器有较大的提高，落点散布达到十公里数量级。弹道—升力式再入航天器的例子如前苏联的“联盟”号飞船、美国的“双子星座”、“阿波罗”飞船。

升力式再人航天器能够克服垂直着陆冲击过载大和落点散布较大的缺点，且能够进行水平着陆和重复使用。弹道一升力式再人航天器虽有升力，也可调整轨道。但升力还不足使再人器水平着陆，仍采用垂直着陆方式，这样必然带来冲击过载，同时其机动能力有限，控制落点能力不够，所以落点精度仍不够高。

为了达到有较大的升阻比，只有通过将再人器设计成非对称体或者带翼，这将带来结构复杂、热环境条件差和防热设计复杂等缺点，但其优点是升阻比大、再人机动能力强、最大过载和最大热流比较小，但总吸热量因飞行时间长会增加。

升力式再人航天器通过调整再人轨道和采用水平着陆方式，可实现定点无损、多次重复使用，其落点精度可提高到米级。升力式再人航天器的例子目前成功的只有美国航天飞机的轨道飞行器。

(3) 航天器飞行力学要解决的问题

再人段的主要问题是减速过载、气动热和总吸热量，而如何减小最大过载、减小气动热带来的热流和总吸热量，使其保持在航天员和有效载荷允许范围之内是轨道设计、制导规律设计、气动热设计和防热设计要共同解决的问题。

航天器飞行力学主要研究内容包括：返回轨道设计、再人制导规律设计和再人落点精度分析。

航天器返回轨道设计是航天器总体设计的一部分。通过返回轨道设计实现总体优化并为防热设计、结构设计、控制系统设计和动力系统设计提供返回轨道参数，同时也为地面测控系统、回收系统提供返回轨道资料。

航天器返回轨道设计的内容主要有参数的选择、偏差量设计、仿真数学模型和飞行试验验证等。

参数选择主要包括：制动参数的选择，对弹道式再人航天器还包括起旋和消旋转速的选择，对弹道一升力式再人航天器还包

括配平攻角的选择和再人大气层后控制程序的选择，对升力式再入航天器包括再入走廊边界的确定和飞行剖面的设计等。

返回轨道的偏差量设计包括：常用的航天器返回轨道最大偏差量的种类及用途，计算返回轨道最大偏差量应考虑的干扰因素，返回轨道最大偏差量的计算方法等。

建立返回轨道计算用的六自由度的数学模型，供数学仿真和分析精度用。

制导方法研究是航天器控制系统总体设计要解决的问题。主要包括两方面的内容：

①制动段的关机方程

标准轨道设计根据标准情况设计了制动发动机推力大小、制动角和制动发动机工作时间。但实际上由于运行轨道的偏差、制动时的初始条件、结构参数不是标准值，加上制动发动机工作时，其推力大小、方向均存在着偏差，当存在着上述误差时，如何确定发动机的工作时间，便有所谓制动发动机关机方案问题。

因为制动结束后的飞行状态参数直接影响再入点运动参数，所以制动发动机的关机方案是再入式航天器要解决的共同问题。

②再入制导规律的设计问题

对弹道式再入器由于对升力不进行控制，当然也就无制导规律设计问题。对弹道—升力式和升力式再人航天器，由于有一定的升力进行机动飞行，因此便有一个根据什么规律来调整其升力变化的问题，这便是制导规律设计问题。

在标准轨道设计中已选择好攻角α、侧滑角β和倾侧角ν的变化规律，通过计算就确定了标准轨道状态参数的变化。但实际飞行中以再入点为初始点，在再入段的飞行中存在着初始条件偏差（包括位置和速度偏差）、再入环境偏差（如大气密度偏差和风等）、结构和气动系数的偏差（如质量偏差、气动系数偏差）。所有这些偏差均会使轨道偏离原来的轨道，从而造成落点偏差，为

了减小落点偏差，保证实际飞行的最大过载和最大热流不超过允许值，要选择好再入时的制导方法。

再入制导方法可以分为两类：

一类是利用预测能力对落点航程进行预测的制导方法称为预测制导法；另一类是利用标准轨道的制导方法称标准轨道法。

标准轨道法（在弹道学中称为摄动制导法）是在航天器的计算机中预存标准再入轨道参数，它们既可以是时间的函数，也可以是速度 v、无因次速度 $\bar{u}=v\cos\Theta/v_c$ 的函数。当航天器再入大气层后，由于上述几种误差的影响，实际轨道参数偏离了标准轨道参数，此时导航系统通过加速度表和陀螺测出再入器的速度增量和姿态参数，通过计算得到再入器的速度和位置，将实测的轨道参数与标准的轨道参数进行比较，可产生误差信号，以此误差信号为输入，通过姿态控制系统调整再入器的姿态角，从而改变升力方向，实现再入器再入轨道的制导和控制。

而预测制导是在航天器计算机内存储理论落点的特征参数，根据导航系统测量的再入器的状态参数，实时进行落点计算，并将计算结果与理论落点参数进行比较，形成误差控制信号，输入计算机的制导方程，再按规定的制导规律控制再入器的姿态角，改变升力的大小和方向，以实现再入器着陆点的控制。

从以上叙述可以看出，导航系统计算航天器的速度和位置是必须的。但惯性器件加速度表和陀螺均存在误差，故导航计算出来的速度和位置也是有误差的，根据它进行制导和控制也必然会产生落点偏差。所以惯性器件的测量误差也是产生落点偏差的因素之一。

预测制导法和标准轨道法相比较，前者着眼于每时每刻实际再入轨道对应的落点与理论落点的误差，并根据这一误差值和最大过载和最大热流的限制产生控制指令，对航天器实现轨道控制。预测制导法可以达到比标准轨道法更高的落点精度，并且对再入

初始条件不敏感。但预测制导要求航天器上的计算机有较快的计算速度和比较大的存贮容量，而且控制方案也较复杂一些。标准轨道法着眼于实测轨道参数和标准轨道参数的比较，实时形成误差信号，以误差信号为输入，实现再入器的再入轨道控制，达到控制着陆点的目的。标准轨道法的优点：控制律简单、容易实现、对计算机速度和容量要求可适当降低。这种方法的缺点：落点控制精度较低，落点偏差受再入初始条件误差以及气动系数偏差影响较大。

③落点精度分析

设计好标准返回轨道、选择好再入制导规律，当给定各种干扰量大小，便可以进行轨道计算（或者说弹道仿真），求出落点偏差。

弹道计算可以采用两种数学模型。一种是三自由度的简化数学模型，假定：航天器是一可控制质点，控制系统是理想的，力矩随时处于平衡状态，此时只分析质心运动。当飞行器绕质心运动进行不剧烈时，其误差是较小的。但有些误差不便于分析。另一种是六自由度的数学模型，这时应给出姿态控制系统的结构图和数学模型，可以尽可能考虑各种误差因素，包括惯性器件的误差。计算落点偏差既可以采用最大偏差法，也可以采用蒙特卡洛随机抽样统计法。用最大偏差法可分析每项误差对落点偏差的影响，而用蒙特卡洛法可分析各误差源的综合影响。

§1.2.2 飞行器再入动力学和制导研究的内容

本书的飞行器指弹道导弹弹头和航天器。再细分主要是弹头、再入机动弹头、卫星、飞船和航天飞机。可简称为再入器。飞行器再入动力学和制导就是研究再入器再入大气层前后的运动规律。它主要包括

①制动段轨道设计（指航天器）

②再入段轨道设计

③再入段制导方法研究

④落点精度计算和分析

本书重点是讨论：再入机动弹道的优化设计问题；再入机动弹头的导引规律和速度控制问题；飞船和航天飞机轨道设计、制导规律研究；飞行器六自由度弹道仿真和精度分析。

1. 再入飞行器运动方程及其简化

飞行器的运动方程可以在任何一本飞行力学的书籍中找到，它是研究飞行器运动规律的基础。都是从矢量形式的动力学方程投影到所需要坐标系得到的。本书将运动方程投影到返回坐标系和半速度坐标系。实际上只是矢量形式的质心运动方程在上述两坐标系投影，转动方程只投影到体坐标系。本书在建立运动方程和简化时突出几点：

①在建立坐标系间转换关系时，其转动次序既有按 3—2—1 次序转动，也有按 2—3—1 次序转动。因为在实际应用中各有优缺点，甚至一条弹道两种转动次序都需要。

②因为再入机动弹头、航天器姿态运动的转动角度大，为避免方程出现奇异，引进四元数，建立相应的转换阵及四元数微分方程。

③运动方程简化是工程上必需的。本书注意阐明三自由度弹道仿真与六自由度弹道仿真的区别及联系，着重阐明控制变量的变化。

2. 飞行器再入运动方程的近似解

求运动方程的近似解，在各种飞行力学中均占有重要的位置。近似解一般为解析解或无因次形式的近似解。它关系明确，便于找出各设计参数与运动参数之间的联系，在初步设计和总体设计时得到广泛的应用。再入运动方程的近似解也不例外，在计算机速度不十分快时，求近似解得到不少学者的重视，对弹头的再入

近似解以艾伦（Allen）等最为著名，航天器的再入近似解以查普曼（Chapman）、罗赫（Loh）、维赫（Vinh）等最为著名。近似解因再人角 Θ_e 不同、升阻比 L/D 不同有简单的、复杂的，近似程度既有高的也有低的。目前计算机速度很高、也很普及，计算三自由度的质心弹道已经不是困难的事，可以用编好的程序进行大量计算，再用复杂的公式求近似解已无必要。本书只讨论较简单的近似解，且其结论对阐述问题、总体设计十分有用。热流计算是防热设计的基础、在轨道设计中占有重要地位。

①弹头再入时运动方程的近似解，除引入艾伦的结果外，还把近似解推广到 C_x 不是常数而是马赫 M 和高度 h 的函数的情况。

②查普曼方程的近似解并不是解析解，但它是无因次形式的微分方程，可以通过数值计算得到不同再人角 Θ_e、不同升阻比 L/D 对过载、热流和总吸热量的影响，作为经典内容，了解它是有益的。

③对升阻比 L/D 不等于零的轨道，罗赫的一阶近似解最简单明了，便于分析问题，得到了应用。

3. 飞行器再入时的最佳弹道

最佳弹道问题可以说是典型的飞行力学问题。

飞行器飞行时除受到一些限制，如过载、热流、攻角限制外，还希望某些性能指标最佳；如飞机的最大续航问题，最佳爬高等，而对再入飞行器除攻角、过载、热流受限制外，也可以提出满足各种性能指标的最佳弹道问题。如机动弹头落地速度最大（或某一点速度最大）、航天器再入时总吸热量最小、横向距离最大等。

本书仅讨论用极大值原理求最佳弹道问题。最佳的再入机动弹道既可以是空间的，也可以是平面的。用极大值原理求解最佳弹道必然遇到计算两点边值问题。

①平面最佳再入机动弹道的数学模型

以末速最大、总吸热量最小为性能指标，用极大值原理建立

了其数学模型。

②空间最佳再入机动弹道的数学模型

以末速最大为性能指标，分别对以α、β、ν为控制变量和以η、ϕ'为控制变量建立了数学模型。建立了横程最大的机动弹道模型。

③最佳弹道的计算方法，解两点边值问题有各种方法，本书仅讨论改进了的邻近极值算法，其计算思路明确，应用起来简单。

④再入机动弹道的工程设计法

对落速最大的平面最佳弹道问题，把约束条件放宽，如不考虑地球重力和曲率影响，略去阻力系数C_x与马赫数M和高度h的关系，求泛函的极值问题，可以变成求函数的极值问题，工程法的最佳弹道与最佳弹道可以互为补充。

4. 机动弹头的弹道设计和制导方法

机动弹头一类以突防为主，通过程序控制使再入弹道改变轨迹，躲避防方的拦截。另一类既通过弹道机动进行突防，同时增加末制导系统以提高其落点精度。本书讨论第二类机动弹头的弹道设计和制导方法。

机动弹头的弹道是非惯性弹道，为了命中固定目标，要选择一个导引规律以保证命中目标。弹道导弹的再入机动弹头由于末制导系统的要求，如图像匹配的要求，对命中目标时的速度方向有一定的要求，如要求垂直地面。所以机动弹头弹道设计有一个以一定速度方向命中目标的导引规律设计问题。不同的机动弹头，为达到良好的爆炸效果，其落地速度大小是有不同的要求，因此有一个速度大小控制问题。

机动弹头一个重要的战术技术指标是命中精度，在三自由度和六自由度情况下，讨论弹道仿真的数学模型、研究干扰作用下的精度，是飞行力学的重要任务。

①机动弹头的最优导引律。应用极大值原理，研究以一定方向命中目标的最优导引规律问题。

②研究理想速度曲线设计和速度大小的控制问题。

③机动弹头三自由度弹道仿真模型建立及精度分析。

④机动弹头控制系统综合设计及六自由度弹道仿真和精度分析。

5. 航天器返回轨道设计和制导方法

航天器包括卫星、飞船和航天飞机，按再入段升阻比的大小对应于升阻比等于零、小升阻比和大升阻比三种情况。对升阻比为零的返回轨道主要是制动段的关机方案设计。对小升阻比的弹道—升力式再入和大升阻比的升力式再入除存在着制动段关机方案设计外，主要的问题是再入段的飞行程序设计和制导方法选择。再入段是返回过程中最重要也是最复杂的一段，其轨道设计和制导方法选择是航天器返回过程要重点研究的问题。

着陆点的落点精度是航天器返回过程的重要技术指标之一。它与控制系统、制导系统和惯性器件精度有密切关系，牵涉到着陆场区的选择、搜索队伍的布置。

大升阻比的航天飞机轨道飞行器轨道设计和制导方法有其特点，先画出再入走廊，后在再入走廊内选择满足射程要求的飞行剖面，而再入段的制导同飞船的再入制导方法相比，增加了末端能量管理段的控制。

①航天器返回制动段研究。航天器要返回地面，必须改变其速度的大小和方向，用推力来减小其速度，有推力大小、方向和工作时间的选择问题，可以从能量最省和航程最短的角度得到制动方向。

②卫星和飞船再入轨道设计。如何选择最合适的再入角 Θ_e，设计再入段倾侧角 ν 的变化规律以保证在标准情况下落点满足总体设计要求是再入轨道设计的重要工作。

③有干扰作用时为保证再入点的误差较小，制动段关机方程设计是航天器制导系统设计的任务之一。而再入段再入制导方法

设计、最佳增益系数的确定直接关系到着陆点的精度。

④三自由度和六自由度的弹道仿真模型的建立和仿真是精度分析的基础。

⑤航天飞机轨道飞行器的标准轨道设计及再入制导方法研究。再入走廊的确定、飞行剖面的选择、最佳反馈增益系数的确定及再入制导方法、着陆点的精度分析是轨道飞行器轨道设计和再入制导方法要解决的主要问题。

第二章 再入飞行器运动方程及其简化

为了全面地描述再入飞行器从制动开始到进入大气层的运动，提供准确的运动状态参数，需要建立完整的运动方程。由于制动有燃料消耗，再入飞行器从制动、再入到落地的全过程是一个变质量质点系，应该用变质量质点系的质心动力学方程和绕质心转动动力学方程来建立再入飞行器的运动方程。关于这部分内容，在文献［1］、［2］有详细讨论，本书将直接引用《远程火箭弹道学》[1]的结果来建立再入飞行器的运动方程。

§2.1 再入飞行器矢量形式的动力学方程

由理论力学知，再入飞行器的运动可以通过再入飞行器质心的平移运动和绕质心的转动运动而合成，相应的有质心动力学方程和绕质心转动的动力学方程。因为再入飞行器矢量形式的动力学方程同远程火箭矢量形式的动力学方程是一样的，这里直接把它写出来[1]。

1. *质心动力学方程*

再入飞行器在惯性坐标系以矢量描述的质心动力学方程如下：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{F}_c+m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_k' \tag{2-1-1}$$

其中：$\boldsymbol{r}$ 为再入飞行器质心在惯性坐标系中的矢径；

$\boldsymbol{P}$ 为作用在再入飞行器上的推力矢量；

$\boldsymbol{R}$ 为作用在再入飞行器上的空气动力矢量；

mg 为作用在再入飞行器上的引力矢量；

F_c 为作用在再入飞行器上的控制力矢量；

m 为再入飞行器的质量。

而附加的哥氏力 F'_k 可表示成

$$F'_k = -2\dot{m}\omega_T \times \rho_e \tag{2-1-2}$$

其中：$\dot{m}$ 为质量秒消耗量，且 $\dot{m}=|\mathrm{d}m/\mathrm{d}t|$；

ω_T 为再入飞行器对惯性坐标系的角速度矢量；

ρ_e 为再入飞行器质心 O_1 到喷口截面中心的矢量。

因其量级较小，在再入飞行器飞行中可略去其影响，本书不考虑附加哥氏力的作用。

2. *绕质心转动的动力学方程*

再入飞行器在惯性坐标系（或平移坐标系）以矢量形式描述的绕质心转动的动力学方程为：

$$\bar{\mathbf{I}}\frac{\mathrm{d}\omega_T}{\mathrm{d}t} + \omega_T \times (\bar{\mathbf{I}} \cdot \omega_T) = M_{st} + M_d + M_c + M'_{rel} + M'_k \tag{2-1-3}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{2-1-4}$$

其中：$\bar{\mathbf{I}}$ 称为惯量张量。I_x、I_y、I_z 是转动惯量，I_{xy}、I_{yz}、I_{xz}是其惯量积。

ω_T 为再入飞行器相对于平移坐标系的转动角速度矢量；

M_{st}为作用在再入飞行器上的空气动力稳定力矩矢量；

M_d 为再入飞行器相对于大气有转动引起的阻尼力矩矢量；

M_c 为作用在再入飞行器上的控制力矩矢量；

M'_{rel}为作用在再入飞行器上的附加的相对力矩矢量；

M'_k 为作用在再入飞行器上的哥氏力矩矢量。

而 M'_{rel}和 M'_k 可用下式计算：

$$M'_{rel} = -\dot{m}\boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{u}_e \tag{2-1-5}$$

$$M'_k = -\frac{\delta \bar{\mathbf{I}}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}_T - \dot{m}\boldsymbol{\rho}_e \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_e) \tag{2-1-6}$$

因该两项力矩的量级较小，在再入飞行器飞行中可以略去其影响。本书也不考虑附加的相对力矩和附加的哥氏力矩的作用。

实际在再入飞行器动力学中采用的质心动力学和绕质心转动的动力学方程为：

$$m(\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2) = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_c + m\boldsymbol{g} \tag{2-1-7}$$

$$\bar{\mathbf{I}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_T/\mathrm{d}t) + \boldsymbol{\omega}_T \times (\bar{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_T) = \boldsymbol{M}_a + \boldsymbol{M}_d + \boldsymbol{M}_c \tag{2-1-8}$$

§2.2　需用的坐标系和坐标系间的转换关系

前面得到了质心运动和绕质心运动的动力学矢量方程。为了建立再入飞行器空间运动的标量方程，研究其运动特性，需要定义一些坐标系。坐标系的选取及定义可以根据习惯和研究问题的方便而定，并无统一格式。但由于选取的坐标系不同，所建立的运动方程的形式和复杂程度有所不同，这就会直接影响求解运动方程的难易程度和运动参数的直观程度，因此选取合适的坐标系是十分重要的。

为了得到标量方程，需要把外力和外力矩投影到所要求的坐标系上去，而外力和外力矩是根据其特性定义在不同的坐标系中。为此应当进行坐标系之间的转换，给出需用的各坐标系之间的转换矩阵。

§2.2.1　需用的坐标系

(1) 地心惯性坐标系 $O_E—X_IY_IZ_I$，简记为 I

该坐标系原点在地心 O_E 处。O_EX_I 轴在赤道面内指向平春分点或某一固定点。O_EZ_I 轴垂直于赤道平面，与地球自转轴重合，指

向北极。O_EY_I 轴的方向是使得该坐标系成为右手直角坐标系的方向。本书认为此坐标系为惯性坐标系。该坐标系可用来描述再入飞行器的轨道及进行导航计算。

（2） 地心坐标系 $O_E—X_EY_EZ_E$，简记为 ***E***

该坐标系原点在地心 O_E，O_EX_E 在赤道平面内指向某子午线与赤道平面的交点，例如制动时刻飞行器质心所在的子午面对应的子午线与赤道平面的交点。O_EZ_E 垂直于赤道平面，指向北极。$O_E—X_EY_EZ_E$ 组成右手直角坐标系。该坐标系随地球一起转动，因此此坐标系为一动参考系。

地心坐标系对确定再入飞行器相对于地球表面的位置很有用。

（3） 返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$，简记为 ***O***

该坐标系也称为地面坐标系，它是与地球固连的动参考系。该坐标系原点是再入飞行器质心在制动时刻的地心矢与标准地球椭球体表面的交点 o，o_oy_o 轴沿 o 点与制动时刻再入飞行器质心 o_1 连线的方向，o_ox_o 在返回制动时刻再入飞行器运行的轨道平面内，且与 o_oy_o 相互垂直，并指向再入飞行器的运动方向。o_oz_o 轴与 o_ox_o、o_oy_o 轴组成右手直角坐标系，如图 2-1 所示。此坐标系类似远程火箭弹道学中的发射坐标系。

利用该坐标系可建立再入飞行器相对于地面的运动方程。

（4） 返回惯性坐标系 $o_A—x_Ay_Az_A$，简记为 ***A***

该坐标系原点 o_A 与返回制动时刻返回坐标系原点 o 重合，各坐标轴与返回坐标系各轴也相应重合。制动以后 o_A 点及各轴的方向在惯性空间保持不动。

该坐标系可利用来进行导航计算

（5） 平移坐标系 $o_T—x_Ay_Az_A$，也简记为 ***A***

该坐标系原点 o_T 选择在再入飞行器质心 o_1，o_T 始终与 o_1 重合，但其坐标轴与返回惯性坐标系各轴始终保持平行。

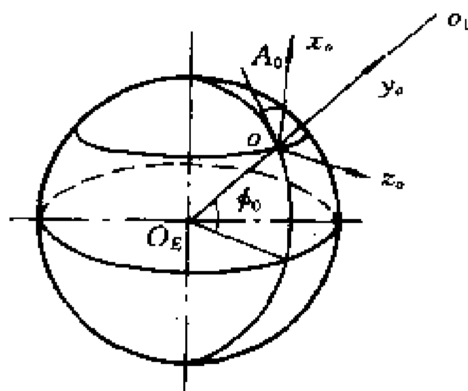


图 2-1 返回坐标系

利用该坐标系可建立绕质心转动的动力学方程。

(6) 飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$，简记为 *B*

该坐标系原点为再入飞行器质心 o_1，o_1x_1 为再入飞行器纵轴，指向头部。o_1y_1 在再入飞行器主对称面内，该平面在返回制动时刻与返回坐标系 x_ooy_o 平面重合，o_1y_1 轴垂直于 o_1x_1，o_1z_1 轴垂直于主对称面，沿运动方向看去 o_1z_1 轴指向右方。$o_1—x_1y_1z_1$ 构成右手直角坐标系。该坐标系针对不同的飞行器可称为箭体坐标系、弹体坐标系、星体坐标系、机体坐标系。也可简称为体坐标系。

该坐标系的位置可用来反映再入飞行器的空间位置（也称为空间姿态）。

(7) 速度坐标系 $o_1—x_vy_vz_v$，简记为 *V*

该坐标系原点在再入飞行器的质心 o_1，o_1x_v 轴沿再入飞行器的速度方向，o_1y_v 轴在再入飞行器主对称面内，垂直于 o_1x_v，o_1z_v 轴垂直于 $x_vo_1y_v$ 平面，顺着运动方向看去 o_1z_v 轴指向右方。$o_1—x_vy_vz_v$ 构成右手直角坐标系。

用该坐标系与其它坐标系的关系，反映出再入飞行器速度矢量的状态。

(8) 半速度坐标系 $o_1—x_hy_hz_h$，简记为 *H*

该坐标系原点为再入飞行器的质心 o_1，o_1x_h 轴沿再入飞行器速度方向，与速度坐标系 o_1x_v 方向重合，o_1y_h 在返回坐标系 xoy 平面内垂直于 o_1x_h 轴（或在 x_voy 平面内垂直于 o_1x_h），$o_1—x_hy_hz_h$ 构成右手直角坐标系。

该坐标系又称弹道坐标系、航迹坐标系。在该坐标系建立运动方程，微分方程左边有简单的形式。

（9） 地理坐标系 $o_1—x_Ty_Tz_T$，简记为 T

该坐标系原点为再入飞行器质心 o_1，o_1y_T 在地球球心 O_E 与质心 o_1 的连线方向上，o_1x_T 在过再入飞行器质心 o_1 的子午面内垂直于 o_1y_T，指向北极为正。o_1z_T 与 o_1x_T、o_1y_T 构成右手直角坐标系。地理坐标系又称北天东坐标系。在实际应用时，常常将坐标原点移到地心 O_E 与质心 o_1 的连线与标准地球椭球体表面的交点 o，记为 $o—x_Ty_Tz_T$。地理坐标系按定义显然是非惯性参考系，即使地球不旋转，由于再入飞行器的运动，坐标系除位置变化外，其方向也要发生变化，反之再入飞行器假设不动，由于地球旋转，该坐标系的位置和方向相对于地心惯性坐标系也要发生变化。

该坐标系用来建立再入段的质心运动方程。

（10） 再入坐标系 $e—x_ey_ez_e$，简记为 e

在研究再入飞行器的运动时，有时不存在返回制动和过渡段。人们只研究再入段的运动，例如弹道式导弹的弹头再入及机动弹头再入，有时人们只对再入飞行器的再入运动特性感兴趣，专门研究飞行器再入段的运动特性。为了方便，不从返回制动开始建立运动方程，只建立再入段的运动方程，为此引入再入坐标系 $e—x_ey_ez_e$。

再入坐标系的原点选在再入时刻地心 O_E 与再入飞行器质心 o_1 连线与标准地球椭球体表面的交点 e，e 点随地球一起转动。ey_e 在地心 O_E 与再入飞行器质心 o_1 的连线上，指向质心 o_1 为正向，而 ex_e 在过 e 点垂直于 ey_e 的平面内，但其指向可以有不同的定义，如类似返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 的 o_ox_o 轴，ex_e 轴指向再入飞行器运动方向。也可以定义在由再入点 e、标准开伞点 $f^{\sim}$ 和地心 O_E 构成平面内，垂直于 ey_e，即 ex_e 指向开伞点，ez_e 由右手规则决定，使 $e—x_ey_ez_e$ 构成右手直角坐标系，这样的定义是为了满足载人飞船

制导的需要。还可以定义 ex_e 在过 e 点的子午面内垂直于 ey_e，$e—x_ey_ez_e$ 构成右手直角坐标系。此时的再入坐标系就是再入时刻的地理坐标系。因为坐标原点随地球旋转，所以再入坐标系 $e—x_ey_ez_e$ 为一非惯性的动坐标系。

此坐标系也用来描述再入飞行器质心 o_1 在再入段相对于地球的运动，它类似于返回坐标系。

(11) 再入惯性坐标系 $e_A—x_Ay_Az_A$，简记为 **A**

该坐标系原点 e_A 与再入时刻的再入坐标系原点 e 重合，各坐标轴也同再入时刻再入坐标系各轴重合。但再入时刻以后，$e_A—x_Ay_Az_A$ 不随地球旋转，不改变原点 e_A 的位置和各轴的方向，其方向在惯性空间保持不变。

此坐标系可用来建立绕质心转动的动力学方程。

§2.2.2 坐标系间转换关系表示法

1. 坐标系间的方向余弦阵

设有一空间矢量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $o—x_py_pz_p$ 各轴上的分量为 (x_p, y_p, z_p)，而在另一坐标系 $o—x_qy_qz_q$ 各轴上的分量为 (x_q, y_q, z_q)，设两坐标系原点重合，但各轴方向不重合。设 $o—x_py_pz_p$ 各轴的单位向量为 x_p^0、y_p^0、z_p^0，而 $o—x_qy_qz_q$ 各轴的单位向量为 x_q^0、y_q^0、z_q^0，则坐标系间的关系可用如下的矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \tag{2-2-1}$$

其中 a_{ij} 是对应的各轴之间夹角的方向余弦，故可得：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p^0 \cdot x_q^0 & x_p^0 \cdot y_q^0 & x_p^0 \cdot z_q^0 \\ y_p^0 \cdot x_q^0 & y_p^0 \cdot y_q^0 & y_p^0 \cdot z_q^0 \\ z_p^0 \cdot x_q^0 & z_p^0 \cdot y_q^0 & z_p^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{P}_Q \tag{2-2-2}$$

上式可简记为

$$P_Q = [a_{ij}] \quad i,j = 1,2,3 \tag{2-2-3}$$

其中

$$a_{11} = x_p^0 \cdot x_q^0 = \cos(x_p, x_q)$$

$$a_{12} = x_p^0 \cdot y_q^0 = \cos(x_p, y_q)$$

其余类推。

$\boldsymbol{P}_Q$ 矩阵是把坐标系 $o-x_q y_q z_q$ 的坐标（x_q，y_q，z_q）转换到坐标系 $o-x_p y_p z_p$ 的坐标（x_p，y_p，z_p）之间的转换矩阵。因该矩阵的九个元素由两坐标系坐标轴夹角的方向余弦值所组成，故称该转换矩阵为方向余弦阵，易证方向余弦阵是正交矩阵 $\boldsymbol{P}_Q^T = \boldsymbol{Q}_P = \boldsymbol{P}_Q^{-1}$.

因方向余弦阵 $\boldsymbol{P}_Q$ 为正交矩阵，故该阵九个元素中只有三个元素是独立的，这是因为这九个元素满足每行（列）自点乘等于 1，行与行（或列与列）之间互相点乘等于零，共有六个关系式。

2. 坐标系间转换矩阵的欧拉角（三参数法）表示法

如果将坐标系视为一刚体，可以通过三次转动使两坐标系相应轴重合。即可以以三个转动角作为独立变量来描述两个坐标系间的转换关系。方向余弦阵九个元素就可以用三个角度的三角函数来表示，这三个角度称为此两坐标系间的欧拉角。当两坐标系位置确定时，因为转动次序不同，其欧拉角的大小也不同，总共有六种转动次序，故有六组不同的欧拉角，但其转换矩阵中的九个元素值却是唯一的。

下面找三个欧拉角与方向余弦阵各元素之间的相互关系。因为这种相互关系的具体形式与转动次序有关，而转动次序的选择与传统习惯、测量方式和测量量的物理意义有关，在应用这种关系时应事先确定转动次序，以免弄错。

下面介绍飞行力学中常用的两种转动次序的相互关系。

（1）第一种常用的关系式

设有原点重合的 P、Q 两右手直角坐标系如图 2-2.

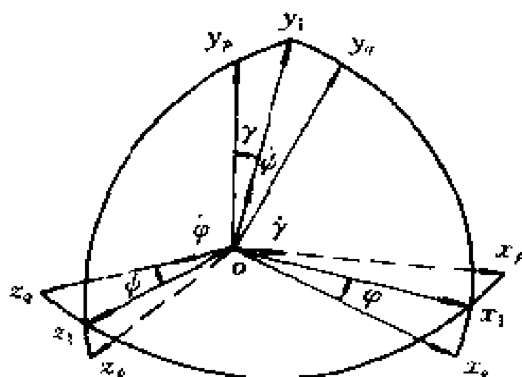


图 2-2　按 3-2-1 次序转动的两坐标系间的欧拉角关系

为了使两坐标系重合，可以考虑将 Q 坐标系先绕 z_q 轴转 φ 角，得 $o-x_1y_1z_q$ 系，再绕 y_1 轴转 ψ 角得 $o-x_py_1z_1$ 系，最后绕 x_p 轴转 γ 角，即转到了 $o-x_py_pz_p$ 坐标系。这种转动次序可简称按 3-2-1 次序转动。易知此时的方向余弦阵为：

$$P_Q =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma \\ \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2-2-4}$$

式（2-2-4）表示已知三个欧拉角 φ、ψ、γ 可以得两坐标系间的方向余弦阵。反之若已知方向余弦阵的各元素 a_{ij}，利用下式可以得三个欧拉角的大小。

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \arcsin(-a_{13}) & -\pi/2 < \psi \leqslant \pi/2 \\ \varphi &= \mathrm{arctg}(\sin\varphi/\cos\varphi) & -\pi < \varphi \leqslant \pi \\ \gamma &= \mathrm{arctg}(\sin\gamma/\cos\gamma) & -\pi < \gamma \leqslant \pi \end{aligned}\right\} \tag{2-2-5}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi &= (a_{12})/\cos\psi \\ \cos\varphi &= (a_{11})/\cos\psi \\ \sin\gamma &= (a_{23})/\cos\psi \\ \cos\gamma &= (a_{33})/\cos\psi\end{aligned}\right\} \tag{2-2-6}$$

（2）第二种常用的关系式

仍设原点重合的 P、Q 两右手直角坐标系如图 2-3.

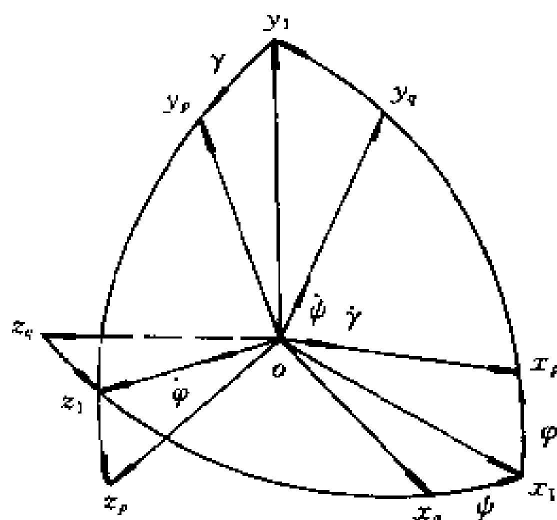


图 2-3　按 2-3-1 次序转动的两坐标系间的欧拉角关系

可以将 Q 坐标系先绕 y_q 轴转 ψ 角得 $o—x_1y_qz_1$ 系，再绕 z_1 轴转 φ 角得 $o—x_py_1z_1$ 系，最后绕 x_p 轴转 γ 角得 $o—x_py_pz_p$ 坐标系。这种转动次序可以简称按 2-3-1 次序转动。易知此时的方向余弦阵为：

$$\boldsymbol{P}_Q=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\varphi\cos\psi+\sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\cos\varphi & \cos\gamma\sin\varphi\sin\psi+\sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\varphi\cos\psi+\cos\gamma\sin\psi & -\sin\gamma\cos\varphi & -\sin\gamma\sin\varphi\sin\psi+\cos\gamma\cos\psi\end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{2-2-7}$$

式（2-2-7）也表示已知三个欧拉角 ψ、φ、γ，可以得两坐标系之间的方向余弦阵。反之若已知方向余弦阵的各元素 b_{ij}，利用下式可得三个欧拉角大小。

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \arcsin(b_{12}) && -\pi/2 < \varphi \leqslant \pi/2 \\ &\psi = \mathrm{arctg}(\sin\psi/\cos\psi) && -\pi < \psi \leqslant \pi \\ &\gamma = \mathrm{arctg}(\sin\gamma/\cos\gamma) && -\pi < \gamma \leqslant \pi \end{aligned}\right\} \tag{2-2-8}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= -(b_{13})/\cos\varphi \\ \cos\psi &= (b_{11})/\cos\varphi \\ \sin\gamma &= -(b_{32})/\cos\varphi \\ \cos\gamma &= (b_{22})/\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2-2-9}$$

（3）坐标系间转换矩阵四元数（四参数法）表示法

随着空间技术、计算技术、特别是捷联惯导技术的发展，早在 1843 年由 B·P·哈密尔顿在数学中引入的四元数，其优越性日渐引起人们重视，四元数理论才真正得到了实际应用。这里直接将后面要用的公式写出，有兴趣的读者可参考文献［3］、［4］。

四元数是一个实数单位和三个虚数单位 i^0、j^0、k^0 组成的超复数：

$$Q = q_0 + q_1 i^0 + q_2 j^0 + q_3 k^0 \tag{2-2-10}$$

其中 q_0、q_1、q_2、q_3 均为实数。

若 $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$，则称此四元数 Q 为规范化四元数，今后我们只研究这类四元数。

原点重合的两坐标系 E_a 和 E_b 之间可用三个欧拉角来确定其方向余弦阵。除上述办法外，由理论力学知，对于坐标系 E_a 和 E_b 一定能够找到一个瞬时旋转轴 OR 和一个角度 α，使得坐标系绕

OR 轴转过角度 α 后，与坐标系 E_b 重合。设轴 OR 与轴 x、y、z 之间夹角分别为 β_1、β_2、β_3，而轴 OR 的方向余弦为

$$p_i = \cos\beta_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{2-2-11}$$

现取

$$q_0 = \cos\alpha/2, q_i = p_i \sin\alpha/2 \qquad (i = 1,2,3) \tag{2-2-12}$$

来构成四元数

$$Q_a^b = q_0 + q_1 i^0 + q_2 j^0 + q_3 k^0 \tag{2-2-13}$$

这个四元数就能够表示 E_a 和 E_b 的关系。四元数虽有四个参数，但实际上只有三个独立参数，因为还有一个约束条件：

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{2-2-14}$$

如果已知两坐标系间的转动四元数 Q，则它们的方向余弦阵可以写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2-2-15}$$

下面写出四元数和欧拉角之间的关系

(1) 采用 3-2-1 转动次序时欧拉角与四元数的关系

当已知欧拉角求四元数：

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{2-2-16}$$

反之当已知四元数，可用下式求解欧拉角：

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= -2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\ \mathrm{tg}\gamma &= \frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-2-17}$$

式（2-2-17）的得到只要利用式（2-2-15）与式（2-2-4）对应元素相等就可以得出。

（2）采用 2-3-1 转动次序时欧拉角与四元数的关系

当已知欧拉角求四元数：

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \tag{2-2-18}$$

反之当已知四元数，可用下式求欧拉角：

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi &= 2(q_1q_2 + q_0q_3)\\ \mathrm{tg}\gamma &= \frac{-2(q_2q_3 - q_0q_1)}{q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2}\\ \mathrm{tg}\psi &= \frac{-2(q_1q_3 - q_0q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\end{aligned}\right\} \tag{2-2-19}$$

式（2-2-19）的得到只要利用式（2-2-7）和式（2-2-15）对应元素相等就可以得出。

剩下一个问题，当已知方向余弦阵的各元素，能否直接写出四元数 q_0、q_1、q_2、q_3 的表达式。设两坐标系 E_a 和 E_b 的方向余弦阵为 $\boldsymbol{B}_a$（C_{ij}）（以 3-2-1 转动次序为例）则可以得：

$$\boldsymbol{B}_a = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2)\\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1)\\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2\end{bmatrix} \tag{2-2-20}$$

找出不相关的三个等式，再加上 q_0、q_1、q_2、q_3 应满足 $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$ 就可直接求出 q_0、q_1、q_2、q_3。

§2.2.3 各坐标系间的转换关系

（1）地心惯性坐标系与地心坐标系间的方向余弦阵 $\boldsymbol{E}_I$

由定义知这两坐标系原点重合，且 O_EZ_E 轴重合。但 O_EX_I 指向平春分点，而 O_EX_E 轴指向制动时刻飞行器质心所在的子午面对应的子午线，故两坐标系之间仅相差一个角度 $\Omega_G+\lambda_0+\omega_eT$，$\Omega_G$ 是平春分点和制动时刻格林威治天文台所在子午线与赤道面交点之间的夹角，λ_0 是制动时刻再入飞行器质心所在处的经度，T 是从制动时刻算起的时间，ω_e 是地球自转角速度。

因为两坐标系仅存在一个欧拉角 $\Omega_G+\lambda_0+\omega_e T$，不难写出两坐标系转换关系：

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = E_I \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \tag{2-2-21}$$

$$E_I = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_G+\lambda_0+\omega_e T) & \sin(\Omega_G+\lambda_0+\omega_e T) & 0 \\ -\sin(\Omega_G+\lambda_0+\omega_e T) & \cos(\Omega_G+\lambda_0+\omega_e T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-2-22}$$

（2）地心坐标系与返回坐标系之间的方向余弦阵 E_O

为讨论问题方便，当两坐标原点不重合时，可将某一坐标系原点移至另一坐标系的原点，使两坐标系原点重合，而各坐标轴平行，如讨论地心坐标系与返回坐标系的关系，可将返回坐标系原点移至地心。

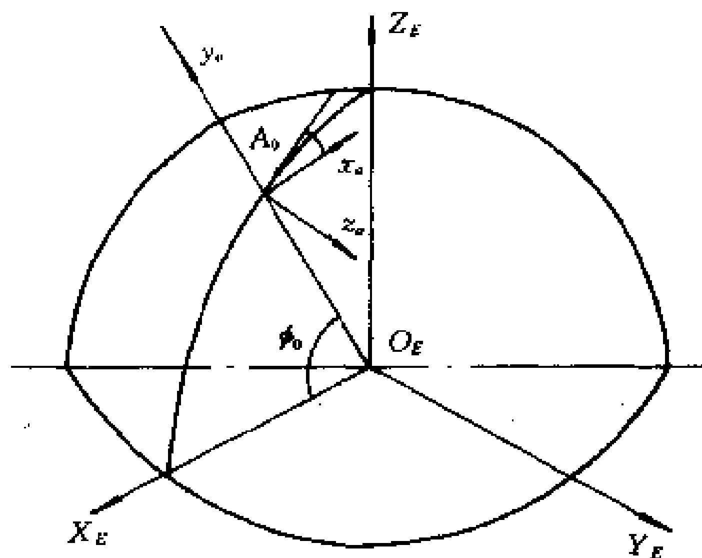


图 2-4 地心坐标系和返回坐标系间的关系

如图 2-4 所示，返回坐标系 $o_o x_o$ 轴与正北方向的夹角为 A_0，

称为制动方位角，A_0 从正北方向顺时针度量为正，而制动时刻的地心纬度为 ϕ_0，要使返回坐标系各轴与地心坐标系各轴重合，可以先绕 y_o 轴正转 $(90°+A_0)$，然后再绕新的 ox' 轴反转 $(-\phi_0)$，再绕 z 轴正转 90°，就可以得到地心坐标系。此时的转换关系：

$$\begin{bmatrix} X_E^0 \\ Y_E^0 \\ Z_E^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O} \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-23}$$

$$\boldsymbol{E_O} = \begin{bmatrix} -\sin\phi_0\cos A_0 & \cos\phi_0 & \sin\phi_0\sin A_0 \\ \sin A_0 & 0 & \cos A_0 \\ \cos A_0\cos\phi_0 & \sin\phi_0 & -\cos\phi_0\sin A_0 \end{bmatrix} \tag{2-2-24}$$

（3）返回惯性坐标系与返回坐标系之间的方向余弦阵 $\boldsymbol{O_A}$

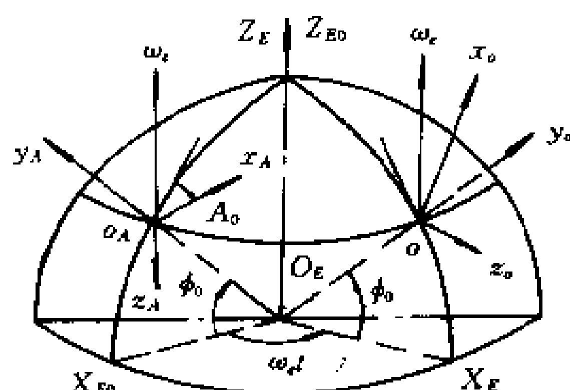


图 2-5　返回惯性坐标系与返回坐标系之间的关系

如图 2-5 所示，可将返回惯性坐标系 $o_A—x_Ay_Az_A$ 转到制动时刻的地心坐标系 $O_E—X_{E0}Y_{E0}Z_{E0}$

则
$$\begin{bmatrix} X_{E0}^0 \\ Y_{E0}^0 \\ Z_{E0}^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O} \begin{bmatrix} x_A^0 \\ y_A^0 \\ z_A^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-25}$$

同时将返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 转到地心坐标系 $O_E—X_EY_EZ_E$。

则
$$\begin{bmatrix} X_E^0 \\ Y_E^0 \\ Z_E^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O} \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-26}$$

再将 $O_E - X_{E0}Y_{E0}Z_{E0}$ 绕 O_EZ_E 轴转 $\omega_e T$ 角，则

$$\begin{bmatrix} X_E^0 \\ Y_E^0 \\ Z_E^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_e T & \sin\omega_e T & 0 \\ -\sin\omega_e T & \cos\omega_e T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{E0}^0 \\ Y_{E0}^0 \\ Z_{E0}^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-27}$$

故
$$\begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O^T} \begin{bmatrix} X_E^0 \\ Y_E^0 \\ Z_E^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O^T} \begin{bmatrix} \cos\omega_e T & \sin\omega_e T & 0 \\ -\sin\omega_e T & \cos\omega_e T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\boldsymbol{E_O} \begin{bmatrix} x_A^0 \\ y_A^0 \\ z_A^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O_A} \begin{bmatrix} x_A^0 \\ y_A^0 \\ z_A^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-28}$$

即

$$\boldsymbol{O_A} = \boldsymbol{E_O^T} \begin{bmatrix} \cos\omega_e T & \sin\omega_e T & 0 \\ -\sin\omega_e T & \cos\omega_e T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{E_O}$$

$$= \boldsymbol{O_A}(\phi_0、A、\omega_e T) \tag{2-2-29}$$

因为 ω_e 较小，在实际计算中可以简化。

（4）返回坐标系与飞行器坐标系之间的欧拉角及方向余弦阵 $\boldsymbol{B_O}$

这两个坐标系的关系用以反映飞行器与返回坐标系的姿态角。为了讨论两个坐标系间的关系，可将 $o_1—x_1y_1z_1$ 坐标系平移到返回坐标系原点 o 上。

这两个坐标系可以用三个欧拉角描述，但转动次序可不同。在飞行力学中常用两种转动次序。

一种是先绕 o_oz_o 轴转动 φ 角，然后绕新的 y' 轴正向转 ψ 角，最

后绕新的 x_1 轴转 γ 角。即按 3-2-1 次序转动，在飞行力学中称这种转动次序为先俯仰、后偏航、再滚动。图 2-6 画出了两坐标系间的欧拉角关系。

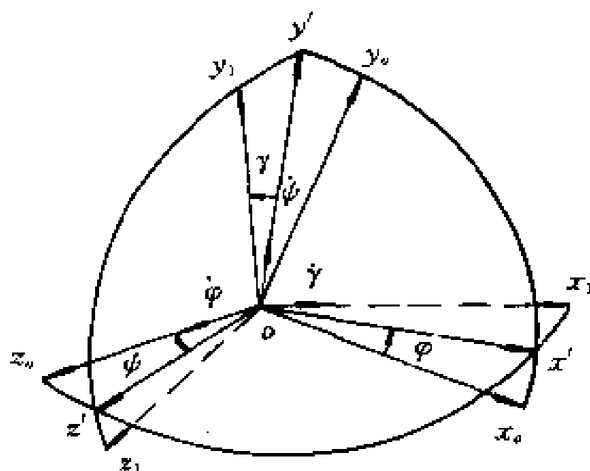


图 2-6　返回坐标系与飞行器坐标系间的欧拉角关系图（按 3-2-1 次序转动）

角 φ 称为俯仰角，是飞行器纵轴在 ox_oy_o 平面上的投影与 ox_o 之间的夹角。角 ψ 称为偏航角，是轴 ox_1 与 ox_oy_o 平面间的夹角。角 γ 称滚动角，为再入飞行器绕 x_1 轴转动的角度。俯仰角 φ、偏航角 ψ、滚动角 γ 的正负号可按形成该角的角速度方向来定，如同瞬时转动轴同向，则该角定义为正，反之为负，图 2-6 所示的 φ、ψ、γ 为正角。

其转换关系利用式（2-2-4）不难写出：

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix} = B_O \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2\text{-}30)$$

$$B_O =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma \\ \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix} \tag{2-2-31}$$

另一种是先绕 $o_o y_o$ 轴转偏航角 ψ，然后绕新 z' 轴转俯仰角 φ，最后绕 $o_o x_1$ 轴滚动角 γ．即按 2-3-1 次序转动，在飞行力学中称这种转动次序为先偏航、后俯仰、再滚动。图 2-7画出了两坐标系间的欧拉角关系。

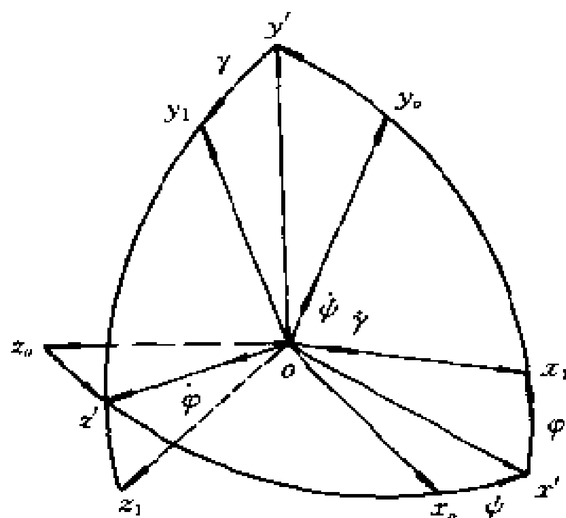


图 2-7　返回坐标系与飞行器坐标系欧拉角关系图（按 2-3-1 次序转动）

此时的俯仰角 φ 是飞行器纵轴与 ox_oz_o 平面的夹角、偏航角 ψ 是 o_1x_1 轴在 ox_oz_o 平面的投影与 o_ox_o 之间的夹角、滚动角 γ 是飞行器绕 o_1x_1 轴的转动角。ψ、φ、γ 角正负号的定义同前一种方法，图 2-7的 φ、ψ、γ 为正角。

其转换关系利用式（2-2-7）不难写出：

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix} = B_O \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-32}$$

$$B_O = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\varphi\cos\psi+\sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\cos\varphi & \cos\gamma\sin\varphi\sin\psi+\sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\varphi\cos\psi+\cos\gamma\sin\psi & -\sin\gamma\cos\varphi & -\sin\gamma\sin\varphi\sin\psi+\cos\gamma\cos\psi \end{bmatrix} \tag{2-2-33}$$

（5）返回坐标系与速度坐标系之间的欧拉角及方向余弦阵 V_O

为了叙述方便可将返回坐标系 $o_o—x_o y_o z_o$ 平移到再入飞行器质心 o_1，使两坐标系原点重合，类似飞行器坐标系与返回坐标系的关系，返回坐标系与速度坐标系之间三个欧拉角也有不同的转动次序。

一种转动次序是先绕 $o_o z_o$ 轴转动 θ 角，然后绕新轴 y' 转动 σ 角，最后绕 $o_0 x_v$ 轴转动 ν 角，即按 3-2-1 次序转动，图 2-8 画出了两坐标系间的欧拉角关系。

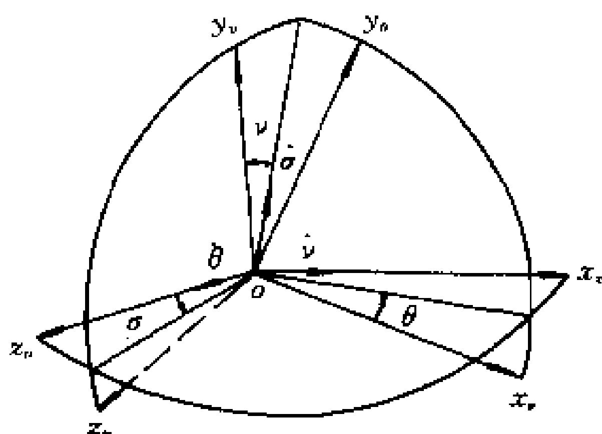


图 2-8　按 3-2-1 次序转动时返回坐标系和速度坐标系间的欧拉角

角 θ 称速度倾角，是速度方向在 $ox_o y_o$ 平面上的投影与 $o_0 x_o$ 间的夹角，角 σ 称航迹偏航角，是速度方向与 $ox_o y_o$ 平面间的夹角，称 ν 角为倾侧角，有时也称速度滚动角，用 γ_v，γ_c 表示。

θ、σ、ν 角的符号定义类似 φ、ψ、γ 的定义。图 2-8 所示 θ、σ、ν 角为正值。类似式（2-2-30）和（2-2-31）可得如下关系：

$$\begin{bmatrix} x_v^0 \\ y_v^0 \\ z_v^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{V_O} \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-34}$$

$$\boldsymbol{V_O} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma & \sin\theta\cos\sigma & -\sin\sigma \\ \cos\theta\sin\sigma\sin\nu - \sin\theta\cos\nu & \sin\theta\sin\sigma\sin\nu + \cos\theta\cos\nu & \cos\sigma\sin\nu \\ \cos\theta\sin\sigma\cos\nu + \sin\theta\sin\nu & \sin\theta\sin\sigma\cos\nu - \cos\theta\sin\nu & \cos\sigma\cos\nu \end{bmatrix} \tag{2-2-35}$$

另一种转动次序是先绕 $o_o y_o$ 轴转 σ 角，然后绕新轴 z' 轴转 θ 角，最后绕 $o_v x_v$ 轴转 ν 角，即按 2-3-1 次序转动，先航迹偏航角，后速度倾角，再倾侧角次序。图 2-9 画出了两坐标系间的欧拉角关系。

速度倾角 θ 是速度方向与 $ox_o z_o$ 平面的倾斜角，反映了速度方向对 $ox_o z_o$ 平面倾斜的大小，而航迹偏航角 σ 是速度方向在 $ox_o z_o$ 平面投影与 ox_o 方向的夹角，它反映了速度方向对预定航迹 ox_o 的偏航。倾侧角 ν 实际上反映了升力对铅垂面 $ox' y_o$ 的倾斜，以后将详细说明。

类似式（2-2-3）和式（2-2-33）不难写出：

$$\begin{bmatrix} x_v^0 \\ y_v^0 \\ z_v^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{V_O} \begin{bmatrix} x_o^0 \\ y_o^0 \\ z_o^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-36}$$

$$\boldsymbol{V_O} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma & \sin\theta & -\cos\theta\sin\sigma \\ -\cos\nu\sin\theta\cos\sigma + \sin\nu\sin\sigma & \cos\nu\cos\theta & \cos\nu\sin\theta\sin\sigma + \sin\nu\cos\sigma \\ \sin\nu\sin\theta\cos\sigma + \cos\nu\sin\sigma & -\sin\nu\cos\theta & -\sin\nu\sin\theta\sin\sigma + \cos\nu\cos\sigma \end{bmatrix} \tag{2-2-37}$$

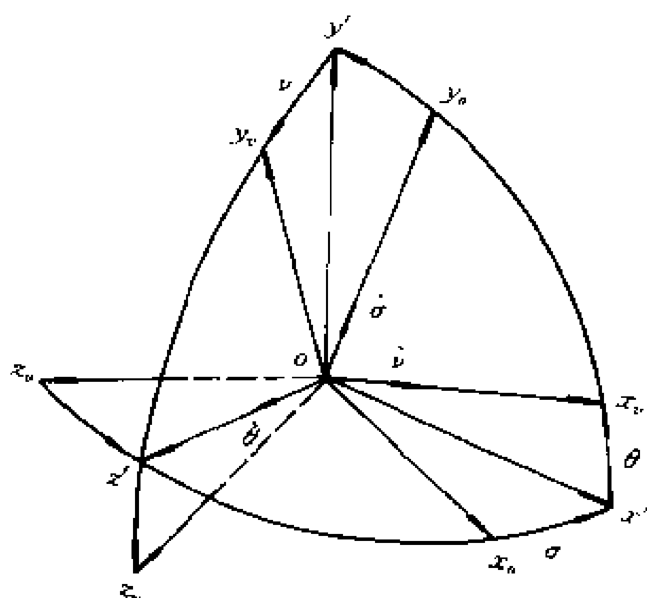


图 2-9 按 2-3-1 次序转动返回坐标系与速度坐标系间的关系

上面详细地介绍了两种不同转动次序的俯仰角 φ、偏航角 ψ、滚动角 γ 和速度倾角 θ、航迹偏航角 σ 及倾侧角 ν 的定义及其方向余弦阵。一般地讲，第二种转动次序多用在水平飞行状态较多的飞机飞行力学和飞航式导弹飞行力学。若 ox_oz_o 为地平面，则速度倾角 θ 反映速度对地平面的倾斜，航迹偏航角 σ 反映对航线的偏航。但这种定义对弹道式导弹垂直发射阶段不适用，如纵轴稍微偏离 ox_oy_o 平面，则 ox_1 在平面 ox_oz_o 上的投影垂直于 ox_o，偏航角为 90°，显然不合理，而采用第一种转动方式，则偏航角很小，所以弹道式导弹飞行力学及惯性导航中多用第一种转动方式。如果飞行中既有水平飞行状态，又有垂直地平飞行状态，如后面介绍的再入机动弹头的飞行轨迹，这时为了减小误差，甚至在不同阶段采用不同的转动次序。

（6）速度坐标系和飞行器坐标系间的欧拉角及方向余弦阵 $\boldsymbol{B}_V$

按定义速度坐标系的 o_1y_v 轴在再入飞行器主对称面 $o_1x_1y_1$ 内，因此这两个坐标系只存在着两个欧拉角，而且只有一种转动次序。即将速度坐标系先绕 o_1y_v 轴转侧滑角 β，再绕新轴 o_1z_1 轴转攻角 α，则两坐标系重合。图 2-10 绘出两坐标系欧拉角关系，图中 α、β 均为正值。

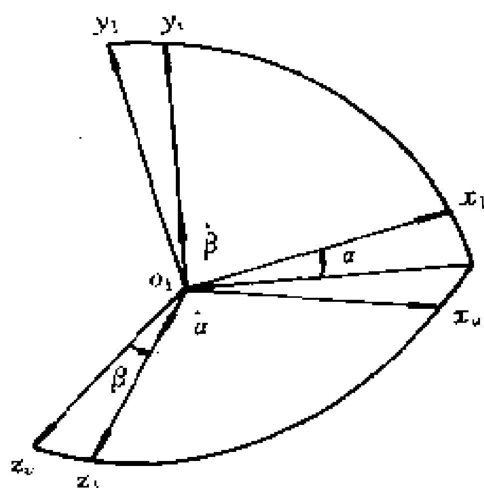


图 2-10　速度坐标系与飞行器坐标系的欧拉角关系图

此两坐标系的转换关系：

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_V \begin{bmatrix} x_v^0 \\ y_v^0 \\ z_v^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-38}$$

$$\boldsymbol{B}_V = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha \\ -\cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{2-2-39}$$

（7）半速度坐标系和速度坐标系间的欧拉角及方向余弦阵 $\boldsymbol{V}_H$

按定义速度坐标系 $o_1-x_vy_vz_v$ 是将半速度坐标系 $o_1-x_hy_hz_h$ 再绕 o_1x_v（即 o_1x_h）转动倾侧角 ν，故转换关系：

$$\begin{bmatrix} x_v^0 \\ y_v^0 \\ z_v^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_H \begin{bmatrix} x_h^0 \\ y_h^0 \\ z_h^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-40}$$

$$\boldsymbol{V}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu & \sin\nu \\ 0 & -\sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix}$$

（8）地理坐标系和半速度坐标系间的欧拉角及方向余弦阵 $\boldsymbol{H}_T$

因为半速度坐标系 o_1y_h 在过 o_1y_T 的铅垂面内，两坐标系之间仅有二个欧拉角 σ_T、θ_T，且规定按第二种转动方式，即先绕 o_0y_T 轴转 σ_T，再绕 z_h 轴转 θ_T，使两坐标系重合，如图 2-11 所示两坐标系

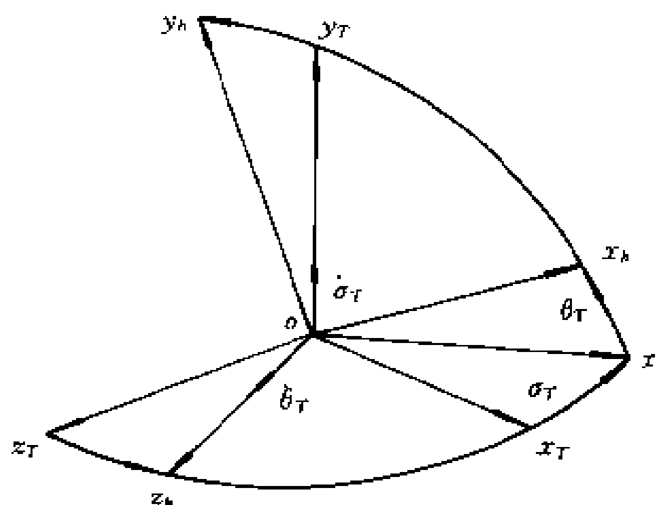


图 2-11　地理坐标系和半速度坐标系间欧拉角关系

间的转换关系：

$$\begin{bmatrix} x_h^0 \\ y_h^0 \\ z_h^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_T \begin{bmatrix} x_T^0 \\ y_T^0 \\ z_T^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-41}$$

$$\boldsymbol{H}_T = \begin{bmatrix} \cos\sigma_T\cos\theta_T & \sin\theta_T & -\sin\sigma_T\cos\theta_T \\ -\cos\sigma_T\sin\theta_T & \cos\theta_T & \sin\sigma_T\sin\theta_T \\ \sin\sigma_T & 0 & \cos\sigma_T \end{bmatrix} \tag{2-2-42}$$

（9）地理坐标系和再入坐标系间的欧拉角及方向余弦阵 $\boldsymbol{T}_e$

前已说明再入坐标系 $e—x_ey_ez_e$ 的 ex_e 可以根据需要确定，为了后面建立运动方程需要，可令 ex_e 的方向在再入时刻的 o_1x_T 方向，即取再入时刻的地理坐标系为再入坐标系，图 2-12 表示了两

坐标间的关系。

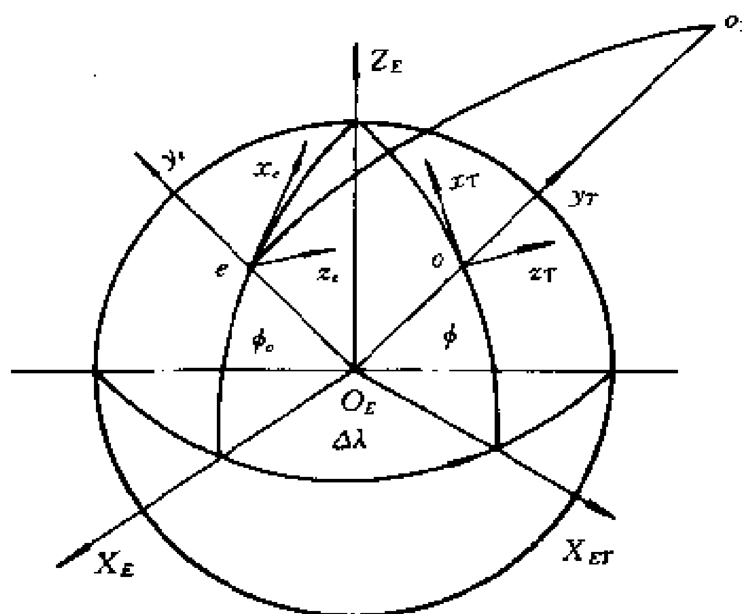


图 2-12　地理坐标系和再入坐标系的关系

将各坐标系原点移至地心 O_E，先将再入坐标系 e—$x_e y_e z_e$ 绕 z_e 轴转 ϕ_0 角，再绕地轴转经度差角 $\Delta\lambda$，再绕 z_T 轴反转 ϕ 角，便与 o—$x_T y_T z_T$ 坐标系重合，利用前面的关系易知：

$$\begin{bmatrix} x_T^0 \\ y_T^0 \\ z_T^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_e \begin{bmatrix} x_e^0 \\ y_e^0 \\ z_e^0 \end{bmatrix} \tag{2-2-43}$$

$$\boldsymbol{T}_e =$$

$$\begin{bmatrix} \sin\phi\cos\Delta\lambda\sin\phi_0 + \cos\phi\cos\phi_0 & -\sin\phi\cos\phi_0\cos\Delta\lambda + \cos\phi\sin\phi_0 & -\sin\phi\sin\Delta\lambda \\ -\cos\phi\cos\Delta\lambda\sin\phi_0 + \sin\phi\cos\phi_0 & \cos\phi\cos\phi_0\cos\Delta\lambda + \sin\phi\sin\phi_0 & \cos\phi\sin\Delta\lambda \\ \sin\Delta\lambda\sin\phi_0 & -\sin\Delta\lambda\cos\phi_0 & \cos\Delta\lambda \end{bmatrix} \tag{2-2-44}$$

如果要求地理坐标系和再入惯性坐标系的关系，只需将 $\Delta\lambda$ 换成 $\Delta\lambda_a = \Delta\lambda + \omega_e t_e$ 即可，t_e 是从再入时刻开始计算的时间。

§2.3 在返回坐标系建立运动方程

再入飞行器采用的质心动力学方程如式（2-1-7）所示

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{F}_c+m\boldsymbol{g} \tag{2-3-1}$$

而再入飞行器采用的绕质心转动方程如式（2-1-8）所示

$$\bar{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_T}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_T\times(\bar{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}_T)=\boldsymbol{M}_a+\boldsymbol{M}_c+\boldsymbol{M}_d \tag{2-3-2}$$

上述两个方程是用矢量形式表示的，矢量方程给人以简洁、清晰的概念，但对这些微分方程求解，必须将其投影到选定的坐标系进行。《远程火箭弹道学》[1]曾将其投影到发射坐标系和速度坐标系来描述其空间运动。其中发射坐标系是定义在将地球看作以角速度 ω_e 进行自转的两轴旋转椭球体上。

原则上讲，上述两组空间弹道方程也适用于返回再入段的弹道计算和分析。但由于返回坐标系的定义并不完全同发射坐标系，有些假设也不相同，空气动力的表现形式也不完全一样，这里根据再入飞行器的特点在返回坐标系建立运动方程。

§2.3.1 在返回坐标系中的质心动力学方程

由于返回坐标系为一动参考系，其相对于惯性坐标系以角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 转动，由矢量导数法则可知：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2}+2m\boldsymbol{\omega}_e\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}+m\boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r})$$

将其代入 式（2-3-1）并整理得：

$$\begin{aligned}m\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2}&=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}-m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_c-m\boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}_e\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\\&=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}-m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_c-m\boldsymbol{a}_e-m\boldsymbol{a}_k\end{aligned} \tag{2-3-3}$$

为了在返回坐标系建立质心动力学方程，应将式（2-3-3）各

个矢量投影到返回坐标系。

(1) 相对加速度 $\delta^2\boldsymbol{r}/\delta t^2$

设 $(v_x, v_y, v_z)^T$ 为质心相对于返回坐标系的相对速度在返回坐标系各轴上的分量，则

$$\frac{\delta \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t \end{bmatrix} \tag{2-3-4}$$

(2) 推力 $\boldsymbol{P}$

设推力无倾斜，可假设发动机的推力沿飞行器坐标系 $o_1\text{—}x_1y_1z_1$ 分解，设推力在各轴上的投影分别为 P_{x1}、P_{y1}、P_{z1}，则推力在返回坐标系的投影 P_x、P_y、P_z 为：

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_B \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} \tag{2-3-5}$$

$\boldsymbol{O}_B$ 为飞行器坐标系与返回坐标系的方向余弦阵，二者之间采用 3-2-1 的次序转动，$\boldsymbol{O}_B$ 的表达式见式 (2-2-31)。

(3) 地球引力 $m\boldsymbol{g}$

根据《远程火箭弹道学》[1]知地球引力可沿地心矢径 $\boldsymbol{r}$ 和地轴 $\boldsymbol{\omega}_e$ 方向分解：

$$m\boldsymbol{g} = mg_r'\boldsymbol{r}^0 + mg_{\omega e}\boldsymbol{\omega}_e^0 \tag{2-3-6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} g_r' &= -\frac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\phi)\right] \\ g_{\omega e} &= -\frac{2fM}{r^2}J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{2-3-7}$$

其中：$fM=\mu$，称为地球引力系数，$\mu=3.986005\times10^{14}$；

$J=\frac{3}{2}J_2=1.62395\times10^{-3}$；

$a_e=6378140\text{m}$，为地球椭球体长半轴；

ϕ 为地心纬度。

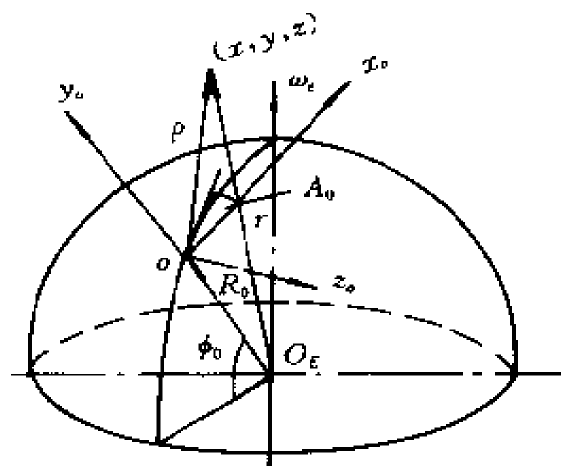


图 2-13　任一时刻地心矢径与返回坐标系原点 o 的地心矢径关系

由图 2-13 知
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{R}_0 \tag{2-3-8}$$

其中：$\boldsymbol{r}$ 为再入飞行器质心任一时刻的地心矢径；

$\boldsymbol{\rho}$ 为再入飞行器质心任一时刻相对于返回坐标系原点的矢径；

$\boldsymbol{R}_0$ 为返回坐标系原点 o 的地心矢径。

故 $\boldsymbol{r}$ 在返回坐标系各轴的分量为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{x}_o^0+(y+R_0)\boldsymbol{y}_o^0+z\boldsymbol{z}_o^0 \\ r &= (x^2+(y+R_0)^2+z^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2-3-9}$$

地球自转角速度 ω_e 在返回坐标系各轴的分量为：

$$\boldsymbol{\omega}_e=\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}_E\begin{bmatrix}0\\0\\ \omega_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos A_0\cos\phi_0\\ \sin\phi_0\\ -\sin A_0\cos\phi_0\end{bmatrix}\omega_e \tag{2-3-10}$$

代式（2-3-9）和式（2-3-10）入式（2-3-6）可得：

$$m\boldsymbol{g}=m\begin{bmatrix}g_x\\g_y\\g_z\end{bmatrix}=m\frac{g_r'}{r}\begin{bmatrix}x\\y+R_0\\z\end{bmatrix}+m\frac{g_{\omega e}}{\omega_e}\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\\omega_{ey}\\\omega_{ez}\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}11)$$

（4）离心惯性力 $-m\boldsymbol{a}_e$ 和哥氏惯性力 $-m\boldsymbol{a}_k$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r})\\\boldsymbol{a}_k=2\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}\end{cases}\quad(2\text{-}3\text{-}12)$$

由式（2-3-9）、（2-3-10）和式（2-3-4）可得：

$$\boldsymbol{a}_e=\begin{bmatrix}a_{ex}\\a_{ey}\\a_{ez}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y+R_0\\z\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}13)$$

$$\boldsymbol{a}_k=\begin{bmatrix}a_{kx}\\a_{ky}\\a_{kz}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}14)$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为由 ω_{ex}、ω_{ey}、ω_{ez}、ω_e 组成的 3×3 矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\omega_{ex}^2-\omega_e^2&\omega_{ex}\omega_{ey}&\omega_{ex}\omega_{ez}\\\omega_{ex}\omega_{ey}&\omega_{ey}^2-\omega_e^2&\omega_{ey}\omega_{ez}\\\omega_{ex}\omega_{ez}&\omega_{ey}\omega_{ez}&\omega_{ez}^2-\omega_e^2\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}15)$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-2\omega_{ez}&2\omega_{ey}\\2\omega_{ez}&0&-2\omega_{ex}\\-2\omega_{ey}&2\omega_{ex}&0\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}16)$$

故

$$\boldsymbol{F}_e=\begin{bmatrix}F_{ex}\\F_{ey}\\F_{ez}\end{bmatrix}=-m\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y+R_0\\z\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}17)$$

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}F_{kx}\\F_{ky}\\F_{kz}\end{bmatrix}=-m\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix}\quad(2\text{-}3\text{-}18)$$

(5) 空气动力 $\boldsymbol{R}$

空气动力 $\boldsymbol{R}$ 在飞行力学中是按下面两种形式分解：

一种是按飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 分解

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Z}_1 \tag{2-3-19}$$

X_1 为轴向力、$\boldsymbol{Y}_1$ 为法向力、$\boldsymbol{Z}_1$ 为横向力，它可按下式计算

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= C_{x1}\rho v^2 S/2 = C_{x1}qS \\ Y_1 &= C_{y1}\rho v^2 S/2 = C_{y1}qS \\ Z_1 &= C_{z1}\rho v^2 S/2 = C_{z1}qS \end{aligned}\right\} \tag{2-3-20}$$

其中：ρ——大气密度、可查大气表或按近似公式计算；

v——飞行器相对于大气的速度；

S——参考面积；

C_{x1}、C_{y1}、C_{z1}——依次为飞行器的轴向力系数、法向力系数、横向力系数，均为无因次量；

$q=\rho v^2/2$——速度头、动压。

另一种是按速度坐标系 $o_1—x_vy_vz_v$ 分解

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} \tag{2-3-21}$$

$\boldsymbol{X}$ 为阻力、$\boldsymbol{Y}$ 为升力、$\boldsymbol{Z}$ 为侧力，它可按下式计算

$$\left.\begin{aligned} X &= C_x\rho v^2 S/2 = C_xqS \\ Y &= C_y\rho v^2 S/2 = C_yqS \\ Z &= C_z\rho v^2 S/2 = C_zqS \end{aligned}\right\} \tag{2-3-22}$$

上式中 C_x、C_y、C_z 分别为阻力系数、升力系数、侧力系数，其余符号意义同式(2-3-20)。

根据速度坐标系和飞行器坐标系间的方向余弦阵，空气动力 R 在两坐标系的分量有如下关系：

$$\begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_B \begin{bmatrix} -X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{2-3-23}$$

而称 $\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{N}$，$N=(Y_1^2+Z_1^2)^{1/2}$ 为总法向力。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{N} \tag{2-3-24}$$

$$R=\sqrt{X_1^2+N^2} \tag{2-3-25}$$

称 $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{L}$，$L=(Y^2+Z^2)^{1/2}$ 为总升力。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{L} \tag{2-3-26}$$

$$R=\sqrt{X^2+L^2} \tag{2-3-27}$$

下面讨论总攻角、总法向力和总升力的定义问题。

因为再入飞行器，如弹头、返回式卫星、载人飞船返回舱都是轴对称体，空气动力研究部门给出的空气动力系数是以总攻角的形式给出，下面讨论以总攻角形式给出空气动力系数时，空气动力如何投影。首先讨论几个术语定义，本书轴向力用 X_1 表示，实际在国内外文献中常以 A 表示；法向力用 Y_1 表示，实际上很多文献以 N 表示；横向力都以 Z_1 表示，为避免混淆，称总法向力为 N，而轴向力 A 与 X_1，轴向力系数 C_A、C_{x1} 在本书中通用。阻力在本书中以 X 表示，实际文献上也常以 D 表示，升力 Y 有的文献以 L 表示。本书为避免混淆，称总升力为 L，而阻力 D 与 X、阻力系数 C_D、C_x 在本书中通用。

如图 2-14 所示，总攻角定义为速度轴 o_1x_v 与飞行器纵轴 o_1x_1 之夹角，记作 η. 则空气动力 $\boldsymbol{R}$ 在 $x_1o_1x_v$ 所决定的平面内，称 $x_1o_1x_v$ 平面为总攻角平面。

显然在总攻角平面内，空气动力 $\boldsymbol{R}$ 可以分解成总法向力和轴向力之和，即

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{A} \tag{2-3-28}$$

同理在总攻角平面内，空气动力 $\boldsymbol{R}$ 可分解成总升力和阻力之和，即

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D} \tag{2-3-29}$$

①轴向力、总法向力和阻力、总升力之间的关系

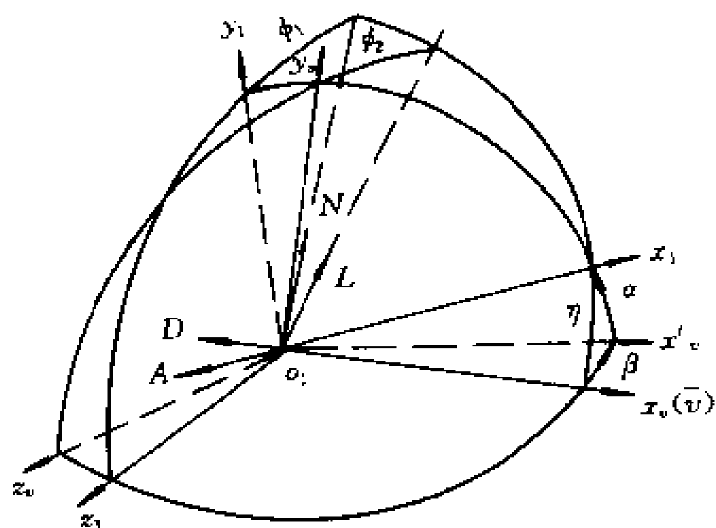


图 2-14 总攻角、总法向力、总升力的示意图

因 A、N、L 和 D 均在总攻角平面内，易知

$$\left.\begin{aligned} D &= A\cos\eta + N\sin\eta \\ L &= N\cos\eta - A\sin\eta \end{aligned}\right\} \tag{2-3-29}$$

换成空气动力系数形式

$$\left.\begin{aligned} C_D &= C_N\sin\eta + C_A\cos\eta \\ C_L &= C_N\cos\eta - C_A\sin\eta \end{aligned}\right\} \tag{2-3-30}$$

②总法向力 N 与法向力 Y_1、横向力 Z_1 之间的关系

利用图 2-14 可以得：

$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\beta \tag{2-3-31}$$

设总法向力 N 与 o_1y_1 间的夹角为 ϕ_1，且规定由总法向力 N 转向法向力 Y_1 沿 o_1x_1 方向 ϕ_1 为正值，图示的 ϕ_1 为正值，由图 2-14知

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi_1 &= \sin\beta/\sin\eta \\ \cos\phi_1 &= \cos\beta\sin\alpha/\sin\eta \end{aligned}\right\} \tag{2-3-32}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}R_{x1}\\R_{y1}\\R_{z1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A\\Y_1\\Z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A\\N\cos\phi_1\\-N\sin\phi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A\\N\cos\beta\sin\alpha/\sin\eta\\-N\sin\beta/\sin\eta\end{bmatrix}\tag{2-3-33}$$

亦可写成系数形式

$$\begin{cases}C_{y1}=C_N\cos\beta\sin\alpha/\sin\eta\\C_{z1}=-C_N\sin\beta/\sin\eta\end{cases}\tag{2-3-34}$$

③总升力 L 与升力 Y、阻力 D 之间的关系

设总升力 L 与 o_1y_v 间的夹角为 ϕ_2，由图 2-14 可得：

$$\begin{cases}\sin\phi_2=\cos\alpha\sin\beta/\sin\eta\\\cos\phi_2=\sin\alpha/\sin\eta\end{cases}\tag{2-3-35}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}R_{xv}\\R_{yv}\\R_{zv}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-D\\L\cos\phi_2\\-L\sin\phi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-D\\L\sin\alpha/\sin\eta\\-L\cos\alpha\sin\beta/\sin\eta\end{bmatrix}\tag{2-3-36}$$

亦可写成空气动力系数形式

$$\begin{cases}C_y=C_L\sin\alpha/\sin\eta\\C_z=-C_L\cos\alpha\sin\beta/\sin\eta\end{cases}$$

空气动力系数通常提供的是 C_N 和 C_A 的方式，现将空气动力投影到返回坐标系各轴上去。

$$\begin{bmatrix}R_x\\R_y\\R_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}R_{x1}\\R_{y1}\\R_{z1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}-C_AqS\\C_NqS\cos\beta\sin\alpha/\sin\eta\\-C_NqS\sin\beta/\sin\eta\end{bmatrix}\tag{2-3-37}$$

（6）控制力 $\boldsymbol{F}_c$

控制力的计算与产生控制力的设备和安装方式有关，它可以是火箭发动机，也可以是空气舵，如载人飞船返回舱是用姿态控制发动机，而机动弹头和航天飞机进入大气层后又多用空气舵。这

里先写出一般表达式。

$$F_c = (F_{cx}\ F_{cy}\ F_{cz})^T \tag{2-3-38}$$

式（2-3-38）中 F_{cx}、F_{cy}、F_{cz}为控制力在返回坐标系各轴的分量。

（7）返回坐标系质心动力学方程

将式（2-3-4）、（2-3-5）、（2-3-11）、（2-3-17）、（2-3-18）、（2-3-37）和式（2-3-38）代入到式（2-3-3），可以得在返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 建立的质心动力学方程：

$$m\begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} + m\frac{g'_r}{r}\begin{bmatrix} x \\ y+R_0 \\ z \end{bmatrix} + \frac{mg_{\omega e}}{\omega_e}\begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} +$$

$$\boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix} -C_A qS \\ C_N qS\cos\beta\sin\alpha/\sin\eta \\ -C_N qS\sin\beta/\sin\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} -$$

$$m\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y+R_0 \\ z \end{bmatrix} - m\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{2-3-39}$$

再入飞行器质心运动学方程

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{2-3-40}$$

§2.3.2　在飞行器坐标系建立绕质心动力学方程

将式（2-3-2）

$$\bar{\mathbf{I}}\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} + \boldsymbol{\omega}_T \times (\bar{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}_T) = \boldsymbol{M}_st + \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_d$$

中的各项在飞行器坐标系内分解：

（1）角加速度的分解

$$\frac{d\omega_T}{dt}=\begin{bmatrix}d\omega_{Tx1}/dt\\ d\omega_{Ty1}/dt\\ d\omega_{Tz1}/dt\end{bmatrix} \tag{2-3-41}$$

ω_T 为飞行器的绝对角速度，即相对于惯性坐标系的角速度，可取相对于返回惯性坐标系的角速度，即相对于平移坐标系 $o_1-x_Ay_Az_A$ 的角速度。ω_{Tx1}、ω_{Ty1}、ω_{Tz1} 为再入飞行器的绝对角速度在飞行器坐标系各轴上的分量。

设再入飞行器相对于返回坐标系的角速度为 ω，则

$$\omega=\omega_T-\omega_e \tag{2-3-42}$$

则飞行器相对于返回坐标系的角速度 ω 在飞行器坐标系的分量为：

$$\begin{bmatrix}\omega_{x1}\\ \omega_{y1}\\ \omega_{z1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{Tx1}\\ \omega_{Ty1}\\ \omega_{Tz1}\end{bmatrix}-B_O\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix} \tag{2-3-43}$$

(2) $\omega_T\times(\bar{\mathbf{I}}\cdot\omega_T)$ 的分解

$$\bar{\mathbf{I}}\cdot\omega_T=\begin{bmatrix}I_x & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{Tx1}\\ \omega_{Ty1}\\ \omega_{Tz1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_x\omega_{Tx1}-I_{xy}\omega_{Ty1}-I_{xz}\omega_{Tz1}\\ -I_{xy}\omega_{Tx1}+I_y\omega_{Ty1}-I_{yz}\omega_{Tz1}\\ -I_{zx}\omega_{Tx1}-I_{yz}\omega_{Ty1}+I_z\omega_{Tz1}\end{bmatrix} \tag{2-3-44}$$

故

$$\omega_T\times(\bar{\mathbf{I}}\cdot\omega_T)=\begin{bmatrix}(I_z-I_y)\omega_{Tz1}\omega_{Ty1}+I_{yz}(\omega_{Tz1}^2-\omega_{Ty1}^2) & +I_{xy}\omega_{Tx1}\omega_{Tz1}-I_{xz}\omega_{Tx1}\omega_{Ty1}\\ (I_x-I_z)\omega_{Tx1}\omega_{Tz1}+I_{zy}\omega_{Tx1}\omega_{Ty1} & +I_{xz}(\omega_{Tx1}^2-\omega_{Tz1}^2)-I_{xy}\omega_{Ty1}\omega_{Tz1}\\ (I_y-I_x)\omega_{Ty1}\omega_{Tx1}-I_{yz}\omega_{Tx1}\omega_{Tz1} & +I_{xy}(\omega_{Ty1}^2-\omega_{Tx1}^2)+I_{xz}\omega_{Ty1}\omega_{Tz1}\end{bmatrix} \tag{2-3-45}$$

(3) 空气动力矩 M_{st}

因为再入飞行器的质心 o_1 和空气动力 R 作用的压心 o_p 不重合，会产生稳定力矩 M_{st}，将其分解到飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 各轴上，可得：

$$M_{st}=\begin{bmatrix}M_{x1st}\\M_{y1st}\\M_{z1st}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{x1st}qSl\\m_{y1st}qSl\\m_{z1st}qSl\end{bmatrix} \tag{2-3-46}$$

其中 M_{x1st}、M_{y1st}、M_{z1st}分别为滚动力矩、偏航力矩和俯仰力矩。而 m_{x1st}、m_{y1st}、m_{z1st}分别为滚动力矩系数、偏航力矩系数、俯仰力矩系数，l 为参考长度。

m_{x1st}、m_{y1st}、m_{z1st}的计算与压心和质心的相对位置有关。压心 o_p 一般在飞行器的纵轴上，而质心的位置对再入飞行器分两种情况：一种像弹头、返回式卫星，质心 o_1 是设计在纵轴上，如不在纵轴上，则认为是误差。另一种像载人飞船返回舱，为了达到产生升力的目的，人为地将质心偏离纵轴。

质心位于纵轴时稳定力矩 M_{st}的计算

$$M_{st}=\begin{bmatrix}M_{x1st}\\M_{y1st}\\M_{z1st}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\Z_1(x_p-x_g)\\-Y_1(x_p-x_g)\end{bmatrix} \tag{2-3-47}$$

其中 x_p、x_g 分别为压心、质心至飞行器前沿的距离，将式（2-3-33）代入上式得：

$$M_{st}=\begin{bmatrix}0\\-N\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}(x_p-x_g)\\-N\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\eta}(x_p-x_g)\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 \\ -C_N qSl(\overline{x}_p - \overline{x}_g)\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \\ -C_N qSl(\overline{x}_p - \overline{x}_g)\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\eta} \end{bmatrix}
$$

其中 $\overline{x}_p = x_p/l$、$\overline{x}_g = x_g/l$ (2-3-48)

质心偏离纵轴时稳定力矩 $\boldsymbol{M}_s$ 的计算

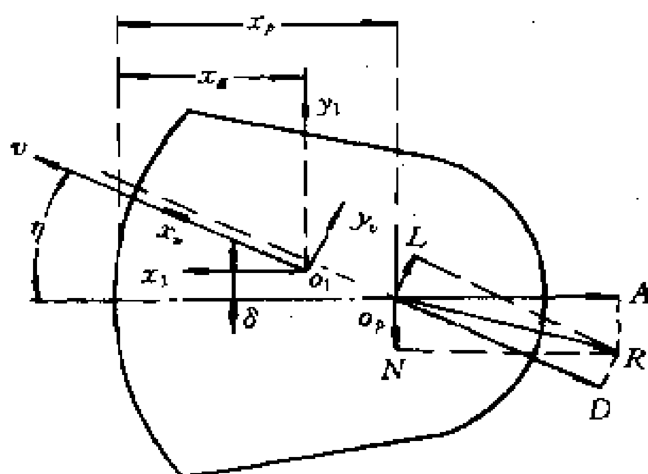


图 2-15 作用在再入飞行器上空气动力 R 及其分量示意图

$\boldsymbol{M}_s$ 的计算与质心如何偏移有关，设质心沿 o_1y_1 方向偏移 δ，如图 2-15 所示，则

$$
\boldsymbol{M}_s = \begin{bmatrix} M_{x1s} \\ M_{y1s} \\ M_{z1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_N qS\sin\beta/\sin\eta\delta \\ -C_N qSl\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}(\overline{x}_p - \overline{x}_g) \\ -C_N qSl(\overline{x}_p - \overline{x}_g)\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\eta} - C_A qS\delta \end{bmatrix}
$$

(2-3-49)

（4）阻尼力矩 M_d

当飞行器绕飞行器坐标系各轴转动时，会产生对应的阻尼力矩，而且常用阻尼力矩系数的导数的形式给出阻尼力矩。

滚动阻尼力矩 $M_{x1d}=m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}}qSl\bar{\omega}_{x1}$ (2-3-50)

偏航阻尼力矩 $M_{y1d}=m_{y1d}^{\bar{\omega}_{y1}}qSl\bar{\omega}_{y1}$ (2-3-51)

俯仰阻尼力矩 $M_{z1d}=m_{z1d}^{\bar{\omega}_{z1}}qSl\bar{\omega}_{z1}$ (2-3-52)

称 $\bar{\omega}_{x1}=\omega_{x1}l/v$、$\bar{\omega}_{y1}=\omega_{y1}l/v$、$\bar{\omega}_{z1}=\omega_{z1}l/v$ 为无因次角速度。而称 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$为滚动阻尼力矩系数导数，$m_{y1d}^{\bar{\omega}_{y1}}$为偏航阻尼力矩系数导数，$m_{z1d}^{\bar{\omega}_{z1}}$为俯仰阻尼力矩系数导数，三个导数均为无因次量。阻尼力矩系数导数一般为负值，它的大小与飞行器的具体形式有关，如轴对称的飞行器 $m_{z1d}^{\bar{\omega}_{z1}}=m_{y1d}^{\bar{\omega}_{y1}}$而 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$较小，甚至可忽略。但对飞机型的再入飞行器，如航天飞机的轨道飞行器，$m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$就不一定很小，一般分析中应该考虑。

由飞行器绕 $o_1—x_1y_1z_1$ 各轴转动除引起对应轴的阻尼力矩外，还会引起交叉力矩，它也是以力矩系数导数形式给出，在一般情况下，只考虑四个交叉力矩。

由滚动角速度 ω_{x1}引起的俯仰力矩 $m_{z1d}^{\bar{\omega}_{x1}}qSl\bar{\omega}_{x1}$

由滚动角速度 ω_{x1}引起的偏航力矩 $m_{y1d}^{\bar{\omega}_{x1}}qSl\bar{\omega}_{x1}$

由偏航角速度 ω_{y1}引起的滚动力矩 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{y1}}qSl\bar{\omega}_{y1}$

由俯仰角速度 ω_{z1}引起的滚动力矩 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{z1}}qSl\bar{\omega}_{z1}$

至于由偏航角速度 ω_{y1}引起的俯仰力矩、由俯仰角速度引起的偏航力矩均不考虑。

称 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{y1}}$、$m_{x1d}^{\bar{\omega}_{z1}}$、$m_{y1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$、$m_{z1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$为旋转导数，统称三个阻尼力矩系数的导数 $m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}}$、$m_{y1d}^{\bar{\omega}_{y1}}$、$m_{z1d}^{\bar{\omega}_{z1}}$、四个交叉力矩系数的旋转导数为空气动力矩的动导数。动导数一般是马赫数 M、α、β 及外形的函数，动导数的计算和实验是空气动力学的一个难题，往往给出的量值误差较大，甚至给不出。七个动导数符号的含义，下标表示对 $o_1—x_1y_1z_1$哪一个轴的力矩，而上标表由绕哪一个轴转动角速度引起的力矩。那么由转动角速度引起的总力矩

$$M_d = \begin{bmatrix} m_{x1d}^{\bar{\omega}_{x1}} & m_{x1d}^{\bar{\omega}_{y1}} & m_{x1d}^{\bar{\omega}_{z1}} \\ m_{y1d}^{\bar{\omega}_{x1}} & m_{y1d}^{\bar{\omega}_{y1}} & 0 \\ m_{z1d}^{\bar{\omega}_{x1}} & 0 & m_{z1d}^{\bar{\omega}_{z1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{x1} \\ \bar{\omega}_{y1} \\ \bar{\omega}_{z1} \end{bmatrix} qSl \tag{2-3-53}$$

与飞行器转动运动有关的力矩还有二个由洗流延迟产生的力矩 $m_{z1}^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$ 和 $m_{y1}^{\dot{\beta}}\dot{\beta}$，这里不讨论了，可参考文献 [5]。

（5）控制力矩 M_c

控制力矩 M_c 的计算与控制力 F_c 的计算一样与产生控制力矩的设备与安装方式有关，这里先写出一般的表达式，在后面有关章节具体讨论。

$$M_c = \begin{bmatrix} M_{x1c} \\ M_{y1c} \\ M_{z1c} \end{bmatrix} \tag{2-3-54}$$

（6）再入飞行器绕质心转动的动力学方程

将式（2-3-54）、（2-3-53）、（2-3-49）、（2-3-45）和式(2-3-41）代入式（2-3-2）可以得：

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx1} \\ \dot{\omega}_{Ty1} \\ \dot{\omega}_{Tz1} \end{bmatrix} = -\omega_T \times (\bar{\mathbf{I}} \cdot \omega_T) + \begin{bmatrix} M_{x1st} \\ M_{y1st} \\ M_{z1st} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} M_{x1d} \\ M_{y1d} \\ M_{z1d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{x1c} \\ M_{y1c} \\ M_{z1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{2-3-55}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
d_1 &= M_{x1st} + M_{x1d} + M_{x1c} - I_{xy}\omega_{Tx1}\omega_{Tz1} \\
&\quad - I_{yz}(\omega_{Tz1}^2 - \omega_{Ty1}^2) + I_{zx}\omega_{Tx1}\omega_{Ty1} - (I_z - I_y)\omega_{Tz1}\omega_{Ty1} \\
d_2 &= M_{y1st} + M_{y1d} + M_{y1c} - I_{yz}\omega_{Tx1}\omega_{Ty1} \\
&\quad - I_{zx}(\omega_{Tx1}^2 - \omega_{Tz1}^2) + I_{xy}\omega_{Ty1}\omega_{Tz1} - (I_x - I_z)\omega_{Tz1}\omega_{Tx1} \\
d_3 &= M_{z1st} + M_{z1d} + M_{z1c} - I_{zx}\omega_{Ty1}\omega_{Tz1} \\
&\quad - I_{xy}(\omega_{Ty1}^2 - \omega_{Tx1}^2) + I_{yz}\omega_{Tx1}\omega_{Tz1} - (I_y - I_x)\omega_{Ty1}\omega_{Tx1}
\end{aligned}\right\}
\tag{2-3-56}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx1} \\ \dot{\omega}_{Ty1} \\ \dot{\omega}_{Tz1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{2-3-57}
$$

将式（2-3-57）展开，可得飞行器转动的动力学方程：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx1} \\ \dot{\omega}_{Ty1} \\ \dot{\omega}_{Tz1} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{2-3-58}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
E &= I_x I_y I_z - 2 I_{xy} I_{xz} I_{yz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 \\
E_1 &= (I_y I_z - I_{yz}^2) d_1 + (I_z I_{xy} + I_{yz} I_{xz}) d_2 + (I_y I_{xz} + I_{xy} I_{yz}) d_3 \\
E_2 &= (I_z I_{xy} + I_{yz} I_{xz}) d_1 + (I_z I_x - I_{zx}^2) d_2 + (I_x I_{yz} + I_{xy} I_{xz}) d_3 \\
E_3 &= (I_y I_{xz} - I_{xy} I_{yz}) d_1 + (I_{xy} I_{xz} + I_x I_{yz}) d_2 + (I_x I_y - I_{xy}^2) d_3
\end{aligned}\right\}
\tag{2-3-59}
$$

将 E_1、E_2、E_3、E_4 代入式（2-3-58）即可得到转动的动力学方程。当然式（2-3-59）是考虑惯性积均不为零的情况，实际计算要根据具体情况进行简化，如存在着对 $o_1x_1y_1$ 的面对称，则 $I_{yz}=I_{zx}=0$，只考虑 I_{xy}的影响。在简化的情况，认为 o_1x_1、o_1y_1、o_1z_1 为惯性主轴，则 $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}=0$，转动方程可大为简化，式(2-3-55)可简化成：

$$
\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx1} \\ \dot{\omega}_{Ty1} \\ \dot{\omega}_{Tz1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}
$$

故

$$\left.\begin{aligned}I_x\dot{\omega}_{Tx1} &= M_{x1st}+M_{x1d}+M_{x1c}-(I_z-I_y)\omega_{Tz1}\omega_{Ty1}\\ I_y\dot{\omega}_{Ty1} &= M_{y1st}+M_{y1d}+M_{y1c}-(I_x-I_z)\omega_{Tx1}\omega_{Tz1}\\ I_z\dot{\omega}_{Tz1} &= M_{z1st}+M_{z1d}+M_{z1c}-(I_y-I_x)\omega_{Ty1}\omega_{Tx1}\end{aligned}\right\} \tag{2-3-60}$$

§2.3.3 在返回坐标系建立运动方程

式（2-3-39）和式（2-3-58）建立了质心动力学方程和绕质心转动的动力学方程，式（2-3-40）建立了质心运动学方程，当已知相对速度 v_x、v_y、v_z 时是可以求出质心的坐标 x、y、z，进一步可求出其它参数，如地心纬度、经度、高度等。但式（2-3-58）求出来的角速度是绝对角速度，而质心运动方程需要的是相对于返回坐标系的方向余弦阵 $\boldsymbol{O}_B$，为此要建立绝对角速度与相对于返回坐标系欧拉角及其方向余弦阵的关系。

1. 绝对角速度 ω_T 与相对于返回坐标系欧拉角的关系

绝对角速度 ω_T 是飞行器相对于平移坐标系 $o_1—x_Ay_Az_A$ 的角速度，它等于返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 相对于返回惯性坐标系 $o_A—x_Ay_Az_A$ 的角速度，也就是地球自转角速度 ω_e 加上飞行器相对于返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 的角速度 ω，即

$$\boldsymbol{\omega}_T=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega} \tag{2-3-61}$$

故

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_{x1}\\ \omega_{y1}\\ \omega_{z1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{Tx1}\\ \omega_{Ty1}\\ \omega_{Tz1}\end{bmatrix}-\boldsymbol{B}_O\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix} \tag{2-3-62}$$

当已知 ω，可以求出相对于返回坐标系的按 3-2-1 次序转动的欧拉角 φ、ψ、γ

因 $\omega=\dot{\varphi}+\dot{\psi}+\dot{\gamma}$

故

$$\left.\begin{aligned}\omega_{x1} &= \dot{\gamma} - \dot{\varphi}\sin\psi \\ \omega_{y1} &= \dot{\psi}\cos\gamma + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma \\ \omega_{z1} &= \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma - \dot{\psi}\sin\gamma\end{aligned}\right\} \tag{2-3-63}$$

解式（2-3-63）可得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi} &= (\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma)/\cos\psi \\ \dot{\psi} &= \omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma \\ \dot{\gamma} &= \omega_{x1} + \mathrm{tg}\psi(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma)\end{aligned}\right\} \tag{2-3-64}$$

积分式（2-3-64）可以解得 φ、ψ、γ，再利用式（2-2-4）可得方向余弦阵 O_B.

上述用欧拉角的方法求方向余弦阵，在欧拉角较小时不会出现问题，当特殊情况如 $\psi=90°$，$\cos\psi=0$，式（2-3-64）是奇异的，为避免此现象可用四元数的微分方程。

当已知 ω，可求出飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 和返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$之间转动四元数应满足的微分方程[3]如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_{x1} & -\omega_{y1} & -\omega_{z1} \\ \omega_{x1} & 0 & \omega_{z1} & -\omega_{y1} \\ \omega_{y1} & -\omega_{z1} & 0 & \omega_{x1} \\ \omega_{z1} & \omega_{y1} & -\omega_{x1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3\end{bmatrix} \tag{2-3-65}$$

当解出某一时刻的四元数值 q_0、q_1、a_2、q_3，则方向余弦阵和欧拉角 φ、ψ、γ 可求出。方向余弦阵利用式（2-2-15）可得：

$$\boldsymbol{B}_O = \begin{bmatrix}q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2\end{bmatrix} \tag{2-3-66}$$

相应的欧拉角利用式（2-2-17）可得出：

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi &= -2(q_1q_3 - q_0q_2)\\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\\ \mathrm{tg}\gamma &= \frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}3\text{-}67)$$

由于四元数的微分方程是线性微分方程，且无三角运算，便于计算，不会出现奇异现象，正愈来愈得到广泛的应用。

求解飞行器姿态欧拉角 φ、ψ、γ，也可以通过方向余弦阵的关系求解。设 φ_T、ψ_T、γ_T 为飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 相对于平移的返回惯性坐标系 $o_T—x_Ay_Az_A$ 的三个欧拉角、且按 3-2-1 次序转动，则 φ_T、ψ_T、γ_T 可通过积分下式得出：

$$\left.\begin{aligned}\dot\varphi_T &= (\omega_{Ty_1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz_1}\cos\gamma_T)/\cos\psi_T\\ \dot\psi_T &= \omega_{Ty_1}\cos\gamma_T - \omega_{Tz_1}\sin\gamma_T\\ \dot\gamma_T &= \omega_{Tx_1} + \mathrm{tg}\psi_T(\omega_{Ty_1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz_1}\cos\gamma_T)\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}3\text{-}68)$$

设返回惯性坐标系 $o_A—x_Ay_Az_A$ 与飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 的方向余弦阵为 $\boldsymbol{B}_A$ $(\varphi_T,\ \psi_T,\ \gamma_T)$，而返回坐标系 $o_o—x_oy_oz_o$ 与飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 的方向余弦阵为 $\boldsymbol{B}_O$ $(\varphi,\ \psi,\ \gamma)$，而返回坐标系与返回惯性坐标系之间的方向余弦阵为 $\boldsymbol{O}_A$ $(\phi_0,\ A_0,\ \omega_eT)$，则

$$\boldsymbol{B}_A(\varphi_T,\psi_T,\gamma_T) = \boldsymbol{B}_O(\varphi,\psi,\gamma)\boldsymbol{O}_A(\phi_0,A_0,\omega_eT) \quad (2\text{-}3\text{-}69)$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_O(\varphi,\psi,\gamma) &= \boldsymbol{B}_A(\varphi_T,\psi_T,\gamma_T)\boldsymbol{A}_O(\phi_0,A_0,\omega_eT)\\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2\text{-}3\text{-}70)$$

当已知 e_{ij} $(i、j=1,2,3)$，利用式 (2-2-5) 可以得 φ, ψ, γ。此方法显然不如直接用相对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 求 φ, ψ, γ 来的简单。

除了上面讨论的欧拉角微分方程、四元数微分方程外，在捷联导航计算中还有一个方向余弦阵微分方程。利用它积分也可以

得到方向余弦阵 B_O，当然也就得到了三个欧拉角的大小。

设有惯性坐标系 $o_1—x_ay_az_a$，简记为 A；动坐标系 $o_1—x_by_bz_b$，简记为 B，它们有共同的原点 o_1 如图 2-16. 在刚体上有一点 M，其

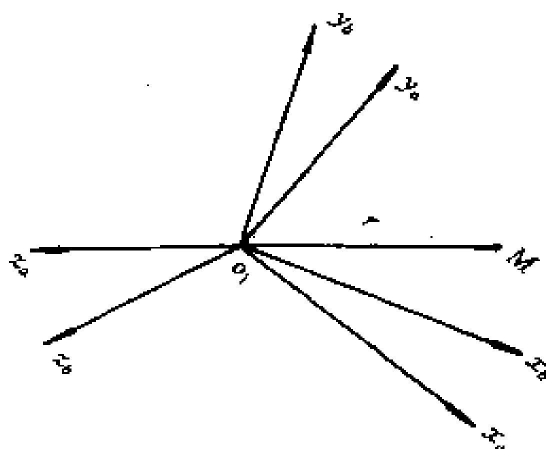


图 2-16　动坐标系和惯性坐标系的关系图

在两坐标系上的分量为

$$r = (x_a,\ y_a,\ z_a)^T \qquad r = (x_b,\ y_b,\ z_b)^T$$

其方向余弦阵为 B_A 则

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = B_A \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{2-3-71}$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = A_B \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \tag{2-3-72}$$

显然 $B_A = A_B^T = A_B^{-1}$，设动坐标系 $o_1—x_by_bz_b$ 相对于惯性坐标系 $o_1—x_ay_az_a$ 定点转动，其方向余弦阵各元素都是时间的函数，但 M 点在动坐标系 $o_1—x_by_bz_b$ 的投影为常数。故

$$v=\begin{bmatrix}v_{xa}\\v_{ya}\\v_{za}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}_a\\\dot{y}_a\\\dot{z}_a\end{bmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A_B\begin{bmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{bmatrix}\right]=\dot{A}_B\begin{bmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{bmatrix} \tag{2-3-73}$$

其中 $\dot{A}_B$ 为一矩阵，其元素为矩阵 A_B 对应元素对时间的导数。

另一方面定点转动时，M 点的速度

$$v=\omega\times r \tag{2-3-74}$$

ω 为动坐标对惯性坐标系的角速度，将其沿动坐标系 $o_1—x_by_bz_b$ 分解

$$\omega=(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)^T \tag{2-3-75}$$

则

$$v=\omega\times r=\begin{bmatrix}v_{xb}\\v_{yb}\\v_{zb}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_yz_b-\omega_zy_b\\\omega_zx_b-\omega_xz_b\\\omega_xy_b-\omega_yx_b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{bmatrix}=\Omega\cdot r \tag{2-3-76}$$

$$\Omega=\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix} \tag{2-3-77}$$

称 Ω 为角速度矩阵，是动坐标系 $o_1—x_by_bz_b$ 对惯性坐标系 $o_1—x_ay_az_a$ 的角速度 ω 在动坐标系上投影 $(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)^T$ 构成的反对称阵。

式(2-3-76)表示绕定点转动任一点的速度可用矩阵形式表示

$$v=\omega\times r=\Omega\cdot r \tag{2-3-78}$$

式（2-3-78）也可以推广，矢量叉乘积可以用矩阵表示：

$$a\times b=\begin{bmatrix}0&-a_z&a_y\\a_z&0&-a_x\\-a_y&a_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} \tag{2-3-79}$$

利用等式（2-3-73）和式（2-3-76）可以得：

$$\begin{bmatrix} v_{xb} \\ v_{yb} \\ v_{zb} \end{bmatrix} = B_A \cdot \dot{A}_B \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \tag{2-3-80}$$

故

$$B_A \dot{A}_B = \Omega$$

即

$$\dot{A}_B = A_B \Omega \tag{2-3-81}$$

式（2-3-81）为方向余弦阵的微分方程。具体的可将式（2-3-81）应用到飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 对平移坐标系 $o_1—x_Ay_Az_A$的方向余弦阵

令

$$A_B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Tz1} & \omega_{Ty1} \\ \omega_{Tz1} & 0 & -\omega_{Tx1} \\ -\omega_{Ty1} & \omega_{Tx1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2-3-82}$$

式（2-3-82）实际上包含有九个线性微分方程，但由于 A_B 阵是正交矩阵，故九个元素不全是独立的，它们之间有六个约束条件。

方向余弦阵微分方程不会出现奇异，可解决大姿态机动的空间飞行问题。但要解九个微分方程，还要受到六个条件的约束，所以其计算工作量大，相比之下，四元数微分方程有方程数目少、约束条件少的优点。

2. 速度、当地速度倾角、速度倾角和航迹偏航角的计算

记速度的大小为 v，当地速度倾角为 Θ，则

$$v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \tag{2-3-83}$$

$$\Theta = \arcsin\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{rv} = \arcsin\frac{xv_x+(y+R_0)v_y+zv_z}{rv}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \Theta \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (2\text{-}3\text{-}84)$$

当已知 v_x，v_y 和 v_z 时，速度倾角 θ、航迹偏航角 σ 可用下式求出：

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arctg}(v_y/v_x)\\ \sigma &= \arcsin(-v_z/v)\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}85)$$

3. 地理位置的计算

地理位置包括地心纬度 ϕ、经度 λ、地心距 r、星下点的大地纬度 B 和飞行器质心处的高度 h. 如图 2-17 所示。

地心纬度 ϕ 是地心 O_E 与质心的连线与赤道平面的夹角，可用下式计算：

因
$$\sin\phi = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}_e}{r\omega_e}$$

故

$$\phi = \arcsin\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}_e}{r\omega_e}\right) = \arcsin\frac{x\omega_{ex}+(y+R_0)\omega_{ey}+z\omega_{ez}}{r\omega_e}$$

$$(2\text{-}3\text{-}86)$$

经度 λ 可用下式求出

$$\lambda = \lambda_0 + \operatorname{arctg}\frac{Y}{X} \qquad (2\text{-}3\text{-}87)$$

其中：λ_0——返回制动时刻的经度；

X、Y、Z——地心矢 $\boldsymbol{r}$ 在地心坐标系 $O_E—X_EY_EZ_E$ 上的分量

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_0\begin{bmatrix}x\\y+R_0\\z\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3\text{-}88)$$

R_0 为返回坐标系原点 o_o 距地心的距离，可用下式计算：

$$R_0 = \frac{a_e b_e}{\sqrt{a_e^2 \sin^2\phi_0 + b_e^2 \cos^2\phi_0}} \tag{2-3-89}$$

下面求星下点的大地纬度、地心纬度和飞行高度。

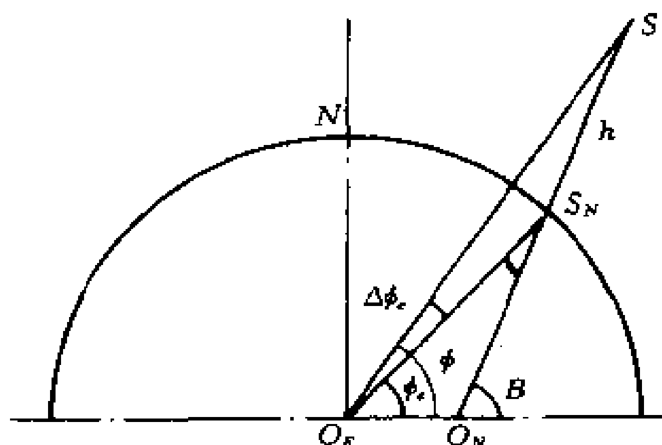


图 2-17　地心纬度 ϕ_e、星下点大地纬度 B 和高度 h 示意图

设 S 为再入飞行器在空间的位置，则其星下点 S_N 是地球椭球体表面上的一点，在 S_N 处的铅垂线 S_NS 正好通过飞行器质心，S_N 的地心纬度为 ϕ_e，S_NS 的大小为飞行高度 h。而求星下点大地纬度 B、地心纬度 ϕ_e 和飞行高度 h 要通过下列方程迭代求出：

$$\left.\begin{aligned}
&B = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\phi_e/e^2) \\
&R_e = \frac{a_e e}{\sqrt{\sin^2\phi_e + e^2\cos^2\phi_e}} \\
&h = [r^2 - R_e^2\sin^2(B-\phi_e)]^{1/2} - R_e\cos(B-\phi_e) \\
&\Delta\phi_e = \arcsin(h\sin(B-\phi_e)/r) \\
&\phi_e = \phi - \Delta\phi_e
\end{aligned}\right\} \tag{2-3-90}$$

4. 欧拉角间的关系

当已知飞行器的俯仰角 φ、偏航角 ψ、滚动角 γ 和速度倾角 θ

和航迹偏航角 σ，则半速度坐标系 $o_1-x_h y_h z_h$ 和飞行器坐标系 $o_1-x_1 y_1 z_1$ 的关系确定，可以求出侧滑角 β、攻角 α 和倾侧角 ν，这一点从方向余弦阵的关系也可以解出 α、β、ν。

因 $\boldsymbol{B}_H(\alpha,\beta,\nu)=\boldsymbol{B}_O(\varphi,\psi,\gamma)\boldsymbol{O}_H(\theta,\sigma)$ (2-3-91)

利用式（2-3-91）对应元素相等可求出：

$$\sin\beta = \sin\psi\cos\gamma\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\gamma\cos\sigma\sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\cos\gamma\sin\sigma$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{2-3-92}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha &= 1/\cos\beta[\sin\psi\sin\gamma\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) - \cos\gamma\cos\sigma\cdot\\ &\quad\sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\sin\gamma\sin\sigma]\\ \cos\alpha &= 1/\cos\beta[\cos\psi\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\psi\sin\sigma]\end{aligned}\right\}$$

$$-\pi<\alpha\leqslant\pi \tag{2-3-93}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\nu &= 1/\cos\beta[\sin\gamma\cos(\varphi-\theta) - \sin\psi\cos\gamma\sin(\varphi-\theta)]\\ \cos\nu &= 1/\cos\beta[\sin\psi\cos\gamma\cos(\varphi-\theta)\sin\sigma\\ &\quad+\sin\gamma\sin\sigma\sin(\varphi-\theta) + \cos\psi\cos\gamma\cos\sigma]\end{aligned}\right\}$$

$$-\pi<\nu\leqslant\pi \tag{2-3-94}$$

5. 在返回坐标系建立运动方程

综上所述，可整理得在返回坐标系建立的运动方程：

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}P_{x1} - C_A qS\\ P_{y1} + C_N qS\cos\beta\sin\alpha/\sin\eta\\ P_{z1} - C_N qS\sin\beta/\sin\eta\end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_{cx}\\ F_{cy}\\ F_{cz}\end{bmatrix}$$

$$+\frac{g_r'}{r}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix} + \frac{g_{\omega e}}{\omega_e}\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix} - \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix} \tag{2-3-95}$$

$$\begin{bmatrix} d\omega_{Tx1}/dt \\ d\omega_{Ty1}/dt \\ d\omega_{Tz1}/dt \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Tx1} \\ \omega_{Ty1} \\ \omega_{Tz1} \end{bmatrix} - \boldsymbol{B}_G \begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_{x1} & -\omega_{y1} & -\omega_{z1} \\ \omega_{x1} & 0 & \omega_{z1} & -\omega_{y1} \\ \omega_{y1} & -\omega_{z1} & 0 & \omega_{x1} \\ \omega_{z1} & \omega_{y1} & -\omega_{x1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin\psi = -2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\ \mathrm{tg}\gamma = \dfrac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \\ r = [x^2 + (y + R_0)^2 + z^2]^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \mathrm{arctg}(v_y/v_x) \\ \Theta = \arcsin \dfrac{xv_x + (y + R_0)v_y + zv_z}{rv} \\ \sigma = \arcsin(-v_z/v) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\beta = \sin\psi\cos\gamma\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\gamma\cos\sigma\sin(\varphi-\theta) \\ \qquad - \cos\psi\cos\gamma\sin\sigma \\ \sin\alpha = 1/\cos\beta[\sin\psi\sin\gamma\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) - \cos\gamma\cos\sigma \cdot \\ \qquad \sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\sin\gamma\sin\sigma] \\ \sin\nu = 1/\cos\beta[\sin\gamma\cos(\varphi-\theta) - \sin\psi\cos\gamma\sin(\varphi-\theta)] \\ \lambda = \lambda_0 + \mathrm{arctg}\,\dfrac{Y}{X} \\ \phi = \arcsin\dfrac{x\omega_{ex} + (y+R_0)\omega_{ey} + z\omega_{ez}}{r\omega_e}\end{cases}$$

$$\begin{cases}B = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\phi_e/e^2) \\ R_e = a_e e/(\sin^2\phi_e + e^2\cos^2\phi_e)^{1/2} \\ h = [r^2 - R_e^2\sin^2(B-\phi_e)]^{1/2} - R_e\cos(B-\phi_e) \\ \Delta\phi_e = \arcsin[h\sin(B-\phi_e)/r] \\ \phi_e = \phi - \Delta\phi_e\end{cases}$$

$$m = m_0 - \dot{m}t$$

以上共有 35 个方程，共有 35 个未知量：v_x、v_y、v_z、x、y、z、ω_{Tx1}、ω_{Ty1}、ω_{Tz1}、ω_{x1}、ω_{y1}、ω_{z1}、q_0、q_1、q_2、q_3、φ、ψ、γ、v、r、θ、Θ、σ、α、β、ν、λ、ϕ、B、h、R_e、ϕ_e、$\Delta\phi_e$、m。

上述 35 个方程是描述再入飞行器在空间飞行时应遵循的关系。但真正要求解还需明确两点：①求解上述方程需给出控制力和控制力矩的变化规律。因为控制力和控制力矩不同，运动方程的解就不同，即飞行轨迹不同。而控制力和控制力矩的变化规律与再入飞行器的种类、任务要求有关，当不给出控制规律时，上述方程不可解。②上述方程虽有 35 个，但独立的微分方程只有 12 个，所以只能给出 12 个初始条件，即 v_{x0}、v_{y0}、v_{z0}、x_0、y_0、z_0、q_{10}、q_{20}、q_{30}、ω_{x10}、ω_{y10}、ω_{z10}，而其余 23 个初始条件可以通过代数方程加以确定，并不是可以任意给出 35 个初始值。

§2.4 在半速度坐标系建立运动方程

本小节建立的方程，只适用于再入段，而且取再入坐标系 $o_e—x_e y_e z_e$ 为再入时刻的地理坐标系 $o_1—x_T y_T z_T$. 另外描述半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$ 与地理坐标系 $o_1—x_T y_T z_T$ 的关系是按先偏航、再俯仰的次序转动，如图 2-11. 此时的 θ_T 即当地的速度倾角 Θ.

地理坐标系 $o_1—x_T y_T z_T$ 与半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$ 之间的转换关系和方向余弦阵为：

$$\begin{bmatrix} x_T^0 \\ y_T^0 \\ z_T^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_H \begin{bmatrix} x_h^0 \\ y_h^0 \\ z_h^0 \end{bmatrix} \tag{2-4-1}$$

$$\boldsymbol{T}_H = \begin{bmatrix} \cos\sigma_T\cos\theta_T & -\cos\sigma_T\sin\theta_T & \sin\sigma_T \\ \sin\theta_T & \cos\theta_T & 0 \\ -\sin\sigma_T\cos\theta_T & \sin\sigma_T\sin\theta_T & \cos\sigma_T \end{bmatrix} \tag{2-4-2}$$

但飞行器坐标系 $o_1—x_1 y_1 z_1$ 与再入坐标系 $e—x_e y_e z_e$ 的转动次序仍为 3-2-1 次序，即先俯仰 φ 角，再偏航 ψ 角，后滚动 γ 角。飞行器坐标系 $o_1—x_1 y_1 z_1$ 与再入惯性坐标系 $e_A—x_A y_A z_A$ 的转动次序也是按 3-2-1 次序转动，即先俯仰 φ_T 角、再偏航 ψ_T 角，最后滚动 γ_T 角。

§2.4.1 在半速度坐标系中的质心动力学方程

再入飞行器质心动力学方程矢量形式由式（2-3-1）知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_c \tag{2-4-3}$$

取再入坐标系 $o_e—x_e y_e z_e$ 为参考系，它是一个动参考系，其相对于惯性坐标系以地球自转角速度 ω_e 转动，故由（2-4-3）可知：

$$m\delta^2\boldsymbol{r}/\delta t^2 = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_c - m\boldsymbol{a}_e - m\boldsymbol{a}_k \tag{2-4-4}$$

为在半速度坐标系中建立质心动力学方程将式（2-4-4）各项投影到半速度坐标系中。

（1）相对加速度 $\delta^2 r/\delta t^2$

设半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$ 相对于再入坐标系 $e—x_e y_e z_e$ 的角速度为 Ω'，半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$ 相对于地理坐标系 $o_1—x_T y_T z_T$ 的角速度为 Ω，而地理坐标系相对于再入坐标系的角速度为 Ω_T，则

$$\Omega' = \Omega + \Omega_T \tag{2-4-5}$$

由图 2-11 知 $\Omega = \dot{\sigma}_T + \dot{\theta}_T$ （2-4-6）

由图 2-12 知 $\Omega_T = \dot{\lambda} + \dot{\phi}$ （2-4-7）

为了将 Ω' 投影到半速度坐标系上，首先把 Ω_T 投影到地理坐标系，由图 2-12 知

$$\Omega_T = (\dot{\lambda}\cos\phi)x_T^0 + (\dot{\lambda}\sin\phi)y_T^0 + (-\dot{\phi})z_T^0$$

再利用地理坐标系与半速度坐标系间的方向余弦阵可得：

$$\begin{bmatrix}\Omega_{Txh}\\ \Omega_{Tyh}\\ \Omega_{Tzh}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\sigma_T\cos\theta_T & \sin\theta_T & -\sin\sigma_T\cos\theta_T\\ -\cos\sigma_T\sin\theta_T & \cos\theta_T & \sin\theta_T\sin\sigma_T\\ \sin\sigma_T & 0 & \cos\sigma_T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\lambda}\cos\phi\\ \dot{\lambda}\sin\phi\\ -\dot{\phi}\end{bmatrix} \tag{2-4-8}$$

而 Ω 在半速度坐标系的投影，由图 2-11

$$\begin{bmatrix}\Omega_{xh}\\ \Omega_{yh}\\ \Omega_{zh}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\sigma}_T\sin\theta_T\\ \dot{\sigma}_T\cos\theta_T\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \tag{2-4-9}$$

故半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$ 对再入坐标系的角速度 Ω' 在半速度坐标系的投影为：

$$\begin{bmatrix}\Omega'_{xh}\\ \Omega'_{yh}\\ \Omega'_{zh}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi) + \sin\sigma_T\cos\theta_T\dot{\phi} + \dot{\sigma}_T\sin\theta_T \\ \dot{\lambda}(-\cos\sigma_T\sin\theta_T\cos\phi + \cos\theta_T\sin\phi) - \sin\sigma_T\sin\theta_T\dot{\phi} + \dot{\sigma}_T\cos\theta_T \\ \dot{\lambda}\sin\sigma_T\cos\phi - \cos\sigma_T\dot{\phi} + \dot{\theta}_T \end{bmatrix} \tag{2-4-10}$$

注意到 $\boldsymbol{v}$ 在地理坐标系的投影为：

$$\begin{cases} v_{xT} = v\cos\theta_T\cos\sigma_T \\ v_{yT} = v\sin\theta_T \\ v_{zT} = -v\cos\theta_T\sin\sigma_T \end{cases} \tag{2-4-11}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi} &= v_{xT}/r = v\cos\theta_T\cos\sigma_T/r \\ \dot{\lambda} &= v_{zT}/(r\cos\phi) = -v\cos\theta_T\sin\sigma_T/(r\cos\phi) \\ \dot{r} &= v\sin\theta_T \end{aligned}\right\} \tag{2-4-12}$$

代式（2-4-12）入（2-4-10）可得

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{xh} &= \dot{\sigma}_T\sin\theta_T - (v\,\mathrm{tg}\phi\sin\theta_T\cos\theta_T\sin\sigma_T)/r \\ \Omega_{yh} &= \dot{\sigma}_T\cos\theta_T - (v\,\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T)/r \\ \Omega_{zh} &= \dot{\theta}_T - v\cos\theta_T/r \end{aligned}\right\} \tag{2-4-13}$$

因 $\delta^2 \boldsymbol{r}/\delta t^2$ 为相对加速度，而 $\delta \boldsymbol{r}/\delta t$ 为再入飞行器质心相对于再入坐标系 $e-x_e y_e z_e$ 的相对速度，它在半速度坐标系 $o_1 x_h$ 轴上，由于半速度坐标系相对于再入坐标系有角速度 $\boldsymbol{\Omega}'$，根据矢量微分法则，可以得

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \dot{v}_{ox_h^0} + \boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{v}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{zh} & \Omega_{yh} \\ \Omega_{zh} & 0 & -\Omega_{xh} \\ -\Omega_{yh} & \Omega_{xh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\Omega_{zh} \\ -v\Omega_{yh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v(\dot{\theta}_T - \dfrac{v\cos\theta_T}{r}) \\ -v(\dot{\sigma}_T\cos\theta_T - \dfrac{v\operatorname{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r}) \end{bmatrix} \tag{2-4-14}$$

（2）空气动力 $\boldsymbol{R}$

设空气动力 $\boldsymbol{R}$ 沿速度坐标系分解成 X、Y、Z，则在半速度坐标系上的投影为

$$\begin{bmatrix} R_{xh} \\ R_{yh} \\ R_{zh} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_V \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y\cos\nu - Z\sin\nu \\ Z\cos\nu + Y\sin\nu \end{bmatrix} \tag{2-4-15}$$

（3）推力 $\boldsymbol{P}$

设推力在飞行器坐标系上分解成 P_{x1}、P_{y1}、P_{z1} 则

$$\begin{bmatrix} P_{xh} \\ P_{yh} \\ P_{zh} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_B \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} \tag{2-4-16}$$

（4）引力 $m\boldsymbol{g}$

引力加速度在 $\boldsymbol{r}$ 方向上的分量

$$g_r' = -\frac{fM}{r^2}[1 + J(\frac{a_e}{r})^2(1 - 5\sin^2\phi)]$$

g_r' 方向在 oy_T 的反方向，故 g_r' 在半速度坐标系上的投影为：

$$\begin{bmatrix} g_{rxh}' \\ g_{ryh}' \\ g_{rzh}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_T \begin{bmatrix} 0 \\ g_r' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_r'\sin\theta_T \\ g_r'\cos\theta_T \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-4-17}$$

引力加速度在 $\boldsymbol{\omega}_e$ 方向上的分量在地理坐标系的投影为 $[g_{\omega e}\cos\phi,\ g_{\omega e}\sin\phi,\ 0]^T$，而 $g_{\omega e} = -\dfrac{2fM}{r^2}J\ (\dfrac{a_e}{r})^2\sin\phi$

再利用式（2-4-2）方向余弦阵，可得 $g_{\omega e}$ 在半速度坐标系的投

影

$$g_{ue} = H_T \begin{bmatrix} g_{ue}\cos\phi \\ g_{ue}\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-4-18}$$

（5）控制力 F_c

前已叙述控制力的计算与产生控制力的设备与安装方式有关。设控制力沿 $o_1—x_1y_1z_1$ 分解，则在半速度坐标系上分解为：

$$\begin{bmatrix} F_{cxh} \\ F_{cyh} \\ F_{czh} \end{bmatrix} = H_V V_B \begin{bmatrix} F_{cx1} \\ F_{cy1} \\ F_{cz1} \end{bmatrix} \tag{2-4-19}$$

（6）离心惯性力 $F_e = -ma_e$

$-a_e = -\omega_e \times (\omega_e \times r)$，$-a_e$ 在 $o_1—x_Ty_Tz_T$ 的投影

$$-a_e = \begin{bmatrix} -\omega_e^2 r\cos\phi\sin\phi \\ \omega_e^2 r\cos\phi\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-4-20}$$

则

$$F_e = -ma_e = \begin{bmatrix} F_{exh} \\ F_{eyh} \\ F_{ezh} \end{bmatrix} = H_T \begin{bmatrix} -m\omega_e^2 r\cos\phi\sin\phi \\ m\omega_e^2 r\cos^2\phi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-4-21}$$

展开式（2-4-21）

$$\left.\begin{aligned} F_{exh} &= -m\omega_e^2 r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\cos\theta_T - \cos^2\phi\sin\theta_T) \\ F_{eyh} &= m\omega_e^2 r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T + \cos^2\phi\cos\theta_T) \\ F_{ezh} &= m\omega_e^2 r\cos\phi\sin\phi\sin\sigma_T \end{aligned}\right\} \tag{2-4-22}$$

（7）哥氏惯性力 $F_k = -ma_k$

因 $-a_k = -2\omega_e \times v$，而 ω_e 在半速度坐标系 $o_1—x_hy_hz_h$ 上的投影

$$\omega_r = \begin{bmatrix} \omega_{exh} \\ \omega_{eyh} \\ \omega_{ezh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi \\ -\cos\sigma_T\sin\theta_T\cos\phi + \cos\theta_T\sin\phi \\ \sin\sigma_T\cos\phi \end{bmatrix}\omega_e$$

(2-4-23)

则

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{bmatrix} F_{kxh} \\ F_{kyh} \\ F_{kzh} \end{bmatrix} = -2m\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}$$

$$= -2m\begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ezh} & \omega_{eyh} \\ \omega_{ezh} & 0 & -\omega_{exh} \\ -\omega_{eyh} & \omega_{exh} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2-4-24)

展开式（2-4-24）可得

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{bmatrix} F_{kxh} \\ F_{kyh} \\ F_{kzh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2mv\omega_{ezh} \\ 2mv\omega_{eyh} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -2mv\omega_e\sin\sigma_T\cos\phi \\ 2mv\omega_e(\cos\sigma\sin\theta_T\cos\phi - \cos\theta_T\sin\phi) \end{bmatrix}$$

(2-4-25)

（8）在半速度坐标系中的质心动力学方程

将式（2-4-24）、（2-4-21）、（2-4-19）、（2-4-18）、（2-4-17）、（2-4-16）、（2-4-15）和式（2-4-14）代入式（2-4-4）可以得：

$$m\begin{bmatrix} \dot{v} \\ v(\dot{\theta}_T - \dfrac{v\cos\theta_T}{r}) \\ -v(\dot{\sigma}_T\cos\theta_T - \dfrac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_B\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{H}_V\begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$+\boldsymbol{H}_B\begin{bmatrix}F_{cx1}\\F_{cy1}\\F_{cz1}\end{bmatrix}+mg'_r\begin{bmatrix}\sin\theta_T\\\cos\theta_T\\0\end{bmatrix}+mg_{\omega e}\boldsymbol{H}_T\begin{bmatrix}\cos\phi\\\sin\phi\\0\end{bmatrix}$$

$$+\boldsymbol{H}_T\begin{bmatrix}-m\omega_e^2r\cos\phi\sin\phi\\m\omega_e^2r\cos^2\phi\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\omega_{ezh}&\omega_{eyh}\\\omega_{ezh}&0&-\omega_{exh}\\-\omega_{eyh}&\omega_{exh}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2mv\\0\\0\end{bmatrix}$$

(2-4-26)

将对应的方向余弦阵 $\boldsymbol{H}_B$、$\boldsymbol{H}_V$、$\boldsymbol{H}_T$ 代入式（2-4-26）且展开成便于积分的形式可得：

$$\begin{aligned}
\dot{v}=&\frac{P_{xh}}{m}-\frac{C_x\rho v^2S}{2m}+\frac{F_{cxh}}{m}-\frac{fM}{r^2}\left[1+J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2(1\right.\\
&\left.-5\sin^2\phi)\right]\sin\theta_T-\frac{2fM}{r^2}J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\sin\phi(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi\\
&+\sin\theta_T\sin\phi)-\omega_e^2r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\cos\theta_T-\cos^2\phi\sin\theta_T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_T=&\frac{P_{yh}}{mv}+\frac{C_y\rho vS}{2m}\cos\nu-\frac{C_z\rho vS}{2m}\sin\nu+\frac{F_{cyh}}{mv}\\
&-\frac{fM}{r^2}\left[1+J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2(1-5\sin^2\phi)\right]\frac{\cos\theta_T}{v}+\frac{2fM}{r^2}J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\\
&\cdot\sin\phi(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T-\sin\phi\cos\theta_T)\frac{1}{v}\\
&+\frac{\omega_e^2r}{v}(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T+\cos^2\phi\cos\theta_T)\\
&-2\omega_e\cos\phi\sin\sigma_T+\frac{v\cos\theta_T}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_T=&\frac{-P_{zh}}{mv\cos\theta_T}-\frac{C_z\rho vS}{2m\cos\theta_T}\cos\nu-\frac{C_y\rho vS}{2m\cos\theta_T}\sin\nu\\
&-\frac{F_{czh}}{mv\cos\theta_T}+\frac{2fM}{r^2}J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\sin\phi\cos\phi\frac{\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T}\\
&+\omega_e^2r\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T}+\frac{2\omega_e}{\cos\theta_T}(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T
\end{aligned}$$

$$- \sin\phi\cos\theta_T) + \frac{v \mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} \Bigg| \tag{2-4-27}$$

而质心坐标运动学方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi} &= v\cos\theta_T\cos\sigma_T / r \\ \dot{\lambda} &= - v\cos\theta_T\sin\sigma_T / (r\cos\phi) \\ \dot{r} &= v\sin\theta_T \end{aligned}\right\} \tag{2-4-28}$$

§2.4.2 在飞行器坐标系建立绕质心转动的动力学方程

绕质心转动的动力学方程均是在飞行器坐标系建立。§2.4.1 中式(2-3-48)的角速度微分方程，除了原来是对平移返回惯性坐标系，现在是对平移的再入惯性坐标系外，完全适用，绕质心转动方程完全一样。

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx1} \\ \dot{\omega}_{Ty1} \\ \dot{\omega}_{Tz1} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{2-4-29}$$

其中 E、E_1、E_2、E_3 见式（2-3-49）。

若取 $o_1 - x_1y_1z_1$ 为主惯轴，式（2-4-29）可以大大简化。

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_{Tx1} &= M_{x1st} + M_{x1d} + M_{x1c} - (I_z - I_y)\omega_{Tz1}\omega_{Ty1} \\ I_y\dot{\omega}_{Ty1} &= M_{y1st} + M_{y1d} + M_{y1c} - (I_x - I_z)\omega_{Tx1}\omega_{Tz1} \\ I_z\dot{\omega}_{Tz1} &= M_{z1st} + M_{z1d} + M_{z1c} - (I_y - I_x)\omega_{Ty1}\omega_{Tx1} \end{aligned}\right\} \tag{2-4-30}$$

式(2-4-30)是常用的形式，外力矩 $\boldsymbol{M}_{st}$、$\boldsymbol{M}_d$、$\boldsymbol{M}_c$ 的计算见§2.3节的讨论。

§2.4.3 在半速度坐标系建立运动方程

由式（2-4-29）得到了飞行器的绝对角速度，如何与欧拉角、四元数、方向余弦阵发生关系，在前面已详细讨论。这里再以欧拉角的微分方程为例，讨论如何把质心运动方程与转动方程联系

起来，类似的对四元数、方向余弦阵也是适用的。

设飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 对再入惯性坐标系 $e—x_Ay_Az_A$ 的三个按 3-2-1 次序转动的欧拉角为 φ_T、ψ_T、γ_T，则类似式(2-3-63)可得：

$$\left.\begin{aligned}\omega_{Tx1} &= \dot{\gamma}_T - \dot{\varphi}_T\sin\psi_T \\ \omega_{Ty1} &= \dot{\varphi}_T\cos\psi_T\sin\gamma_T + \dot{\psi}_T\cos\gamma_T \\ \omega_{Tz1} &= \dot{\varphi}_T\cos\psi_T\cos\gamma_T - \dot{\psi}_T\sin\gamma_T\end{aligned}\right\} \tag{2-4-31}$$

解式（2-4-31）可以得欧拉角的微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}_T &= \frac{1}{\cos\psi_T}(\omega_{Ty1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz1}\cos\gamma_T) \\ \dot{\psi}_T &= \omega_{Ty1}\cos\gamma_T - \omega_{Tz1}\sin\gamma_T \\ \dot{\gamma}_T &= \omega_{Tx1} + \mathrm{tg}\psi_T(\omega_{Ty1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz1}\cos\gamma_T)\end{aligned}\right\} \tag{2-4-32}$$

积分上式，求得 φ_T、ψ_T、γ_T 值，当已知 φ_T、ψ_T、γ_T 如何同质心运动方程发生联系呢？从式（2-4-26）看出，要解微分方程必须知 $\boldsymbol{H}_B$，而 $\boldsymbol{H}_B$ 是攻角 α、侧滑角 β 和倾侧角 ν 的函数，因此当已知 φ_T、ψ_T 和 γ_T 及质心运动时，如何求 α、β、ν 便是下面要研究的问题。

（1）通过方向余弦阵的关系求 α、β、ν

从前面讨论知再入惯性坐标系 $e—x_Ay_Az_A$ 与飞行器坐标系 $o_1—x_1y_1z_1$ 之间的转换关系为：

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_A(\varphi_T,\psi_T,\gamma_T)\begin{bmatrix} x_A^0 \\ y_A^0 \\ z_A^0 \end{bmatrix} \tag{2-4-33}$$

另一方面

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_H(\alpha,\beta,\nu)\begin{bmatrix} x_h^0 \\ y_h^0 \\ z_h^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_H(\alpha,\beta,\nu)\boldsymbol{H}_T(\sigma_T,\theta_T)\begin{bmatrix} x_T^0 \\ y_T^0 \\ z_T^0 \end{bmatrix}$$

$$= B_H(\alpha,\beta,\nu)H_T(\sigma_T,\theta_T)T_A(\phi,\phi_0,\Delta\lambda_a)\begin{bmatrix} x_A^0 \\ y_A^0 \\ z_A^0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}4\text{-}34)$$

其中
$$\Delta\lambda_a = \Delta\lambda + \omega_e T$$

故

$$\begin{aligned} B_H(\alpha,\beta,\nu) &= B_A(\varphi_T,\psi_T,\gamma_T)A_T(\phi,\phi_0,\Delta\lambda_a)T_H(\sigma_T,\theta_T) \\ &= E(\varphi_T,\psi_T,\gamma_T,\phi,\phi_0,\Delta\lambda_a,\sigma_T,\theta_T) \\ &= E(e_{ij}) \end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\nu + \cos\alpha\sin\beta\sin\nu & \sin\alpha\sin\nu - \cos\alpha\sin\beta\cos\nu \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\nu - \sin\alpha\sin\beta\sin\nu & \cos\alpha\sin\nu + \sin\alpha\sin\beta\cos\nu \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\nu & \cos\beta\cos\nu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}4\text{-}35)$$

利用 $\sin\beta = e_{31}$ 可得

$$\beta = \arcsin e_{31} \qquad -\pi/2 < \beta \leqslant \pi/2 \quad (2\text{-}4\text{-}36)$$

利用 $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha} = \dfrac{-e_{21}}{e_{11}}$ 可得

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{-e_{21}}{e_{11}}\right) \qquad -\pi < \alpha \leqslant \pi \quad (2\text{-}4\text{-}37)$$

利用 $\mathrm{tg}\nu = \dfrac{\cos\beta\sin\nu}{\cos\beta\cos\nu} = \dfrac{-e_{32}}{e_{33}}$ 可得

$$\nu = \mathrm{arctg}\left(\frac{-e_{32}}{e_{33}}\right) \qquad -\pi < \nu \leqslant \pi \quad (2\text{-}4\text{-}38)$$

（2）通过角速度的关系求 α、β、ν

飞行器相对于再入惯性坐标系角速度，即 $o_1-x_1y_1z_1$ 相对于 $e-x_Ay_Az_A$ 的角速度 $\omega_T = (\omega_{Tx1}, \omega_{Ty1}, \omega_{Tz1})^T$，而飞行器坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 相对于半速度坐标系的角速度 $\omega_h = \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\nu}$，而半速度

坐标系 $o_1-x_h y_h z_h$ 相对于再入惯性坐标系 $e-x_A y_A z_A$ 的角速度为 Ω_I，$\Omega_I=\Omega'+\omega_e$。

将 Ω_I 投影到半速度坐标系得：

$$\left.\begin{aligned}\Omega_{Ixh} &= \Omega'_{xh} + \omega_e(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi)\\ \Omega_{Iyh} &= \Omega'_{yh} + \omega_e(-\cos\phi\sin\theta_T\cos\sigma_T + \cos\theta_T\sin\phi)\\ \Omega_{Izh} &= \Omega'_{zh} + \omega_e\cos\phi\sin\sigma_T\end{aligned}\right\} \tag{2-4-39}$$

故

$$\begin{aligned}\omega_T &= \omega_{Tx1} + \omega_{Ty1} + \omega_{Tz1}\\ &= \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\nu} + \Omega_{Ixh} + \Omega_{Iyh} + \Omega_{Izh}\end{aligned} \tag{2-4-40}$$

当已知 ω_{Tx1}、ω_{Ty1}、ω_{Tz1} 和利用式（2-4-39）求出的 Ω_{Ixh}、Ω_{Iyh}、Ω_{Izh}，原则上将式（2-4-40）投影到任一坐标系均可求出 $\dot{\alpha}$、$\dot{\beta}$、$\dot{\nu}$，但最方便的是把式（2-4-40）投影到 oz_v，ox' 和 oy_v 可以得到：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega_{Tz1} - \omega_{Tx1}\cos\alpha\mathrm{tg}\beta + \omega_{Ty1}\sin\alpha\mathrm{tg}\beta\\ &\quad + \Omega_{Iyh}\frac{\sin\nu}{\cos\beta} - \Omega_{Izh}\frac{\cos\nu}{\cos\beta}\\ \dot{\beta} &= \omega_{Tx1}\sin\alpha + \omega_{Ty1}\cos\alpha - \Omega_{Iyh}\cos\nu\\ &\quad - \Omega_{Izh}\sin\nu\\ \dot{\nu} &= \omega_{Tx1}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \omega_{Ty1}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \Omega_{Ixh}\\ &\quad - \Omega_{Iyh}\sin\nu\mathrm{tg}\beta + \Omega_{Izh}\cos\nu\mathrm{tg}\beta\end{aligned}\right\} \tag{2-4-41}$$

当得到了 $\dot{\alpha}$、$\dot{\beta}$ 和 $\dot{\nu}$ 后，通过积分就可以得 α、β、ν 了。

（3）在半速度坐标系建立运动方程

将式（2-4-41）、（2-4-32）、（2-4-29）、（2-4-28）和式(2-4-27）列写在一起可以得：

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{P_{xh}}{m} - \frac{C_x\rho v^2 S}{2m} + \frac{F_{cxh}}{m} + g'_r\sin\theta + g_{\omega e}(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi\\ &\quad + \sin\theta_T\sin\phi) - \omega_e^2 r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\cos\theta_T - \cos^2\phi\sin\theta_T)\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\theta}_T &= \frac{P_{yh}}{mv} + \frac{C_y \rho v S}{2m}\cos\nu - \frac{C_z \rho v S}{2m}\sin\nu + \frac{F_{cyh}}{mv} \\
&\quad + g_r' \frac{\cos\theta_T}{v} + g_{\omega e}(-\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T + \sin\phi\cos\theta_T)\frac{1}{v} \\
&\quad + \frac{\omega_e^2 r}{v}(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T + \cos^2\phi\cos\theta_T) \\
&\quad - 2\omega_e\cos\phi\sin\sigma_T + \frac{v\cos\theta_T}{r} \\
\dot{\sigma}_T &= \frac{-P_{zh}}{mv\cos\theta_T} - \frac{C_z \rho v S}{2m\cos\theta_T}\cos\nu - \frac{C_y \rho v S}{2m\cos\theta_T}\sin\nu \\
&\quad - \frac{F_{czh}}{mv\cos\theta_T} - g_{\omega e}\frac{\cos\phi\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T} + \omega_e^2 r\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T} \\
&\quad + \frac{2\omega_e}{\cos\theta_T}(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T - \sin\phi\cos\theta_T) \\
&\quad + \frac{v\,\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} \\
\dot{\phi} &= \frac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r} \\
\dot{\lambda} &= \frac{-v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \\
\dot{r} &= v\sin\theta_T \\
\dot{\omega}_{Tx1} &= E_1/E \\
\dot{\omega}_{Ty1} &= E_2/E \\
\dot{\omega}_{Tz1} &= E_3/E \\
\dot{\varphi}_T &= (\omega_{Ty1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz1}\cos\gamma_T)/\cos\psi_T \\
\dot{\psi}_T &= \omega_{Ty1}\cos\gamma_T - \omega_{Tz1}\sin\gamma_T \\
\dot{\gamma}_T &= \omega_{Tx1} + \mathrm{tg}\psi(\omega_{Ty1}\sin\gamma_T + \omega_{Tz1}\cos\gamma_T) \\
\dot{\alpha} &= \omega_{Tz1} - \omega_{Tx1}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \omega_{Ty1}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta \\
&\quad + \Omega_{lyh}\sin\nu/\cos\beta - \Omega_{lzh}\cos\nu/\cos\beta
\end{aligned}\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\beta} &= \omega_{Tx1}\sin\alpha - \omega_{Ty1}\cos\alpha - \Omega_{Iyh}\cos\nu - \Omega_{Ixh}\sin\nu \\
\dot{\nu} &= \omega_{Tx1}\cos\alpha/\cos\beta - \omega_{Ty1}\sin\alpha/\cos\beta - \Omega_{Ixh} \\
&\quad - \Omega_{Iyh}\sin\nu\mathrm{tg}\beta + \Omega_{Izh}\cos\nu\mathrm{tg}\beta \\
\Omega_{Ixh} &= \Omega_{xh} + \omega_e(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi) \\
\Omega_{Iyh} &= \Omega_{yh} + \omega_e(-\cos\phi\sin\theta_T\cos\sigma_T + \cos\theta_T\sin\phi) \\
\Omega_{Izh} &= \Omega_{zh} + \omega_e\cos\phi\sin\sigma_T
\end{aligned}\right\} \tag{2-4-42}$$

上面只列写了主要的动力学方程、运动学方程和必要的补充关系，还可以写出一些补充关系如星下点的纬度、飞行高度等，相应地就增加了方程的未知数和个数，这些前面已讨论过，这里不重复。式（2-4-42）共有 18 个方程，含有 v、θ_T、σ_T、ϕ、λ、r、ω_{Tx1}、ω_{Ty1}、ω_{Tz1}、φ_T、ψ_T、γ_T、α、β、ν、Ω_{Ixh}、Ω_{Iyh}、Ω_{Izh}18 个未知数，如给出初值条件和附加条件是可以数值积分求出空间弹道。18 个方程中虽有微分方程 15 个，但独立的只有 12 个，因 $\dot{\alpha}$、$\dot{\beta}$、$\dot{\nu}$ 虽是微分方程，但其初值 α_0，β_0，ν_0 不能任意给出，这点从式（2-4-35）也可以看出，当 φ_T、ψ_T、γ_T、σ_T、θ_T 的初值已定时，α_0、β_0、ν_0 也唯一确定，不能任意给出。

所谓要给出附加条件才可以数值积分求出弹道，是因为只有给出控制力和控制力矩的变化规律、推力的变化规律，运动方程才可以求解。否则解出来的弹道，只能是无控制的弹道，如弹道式导弹弹头再入时的弹道。

不管是在返回坐标系列写的运动方程，还是在半速度坐标系列写的运动方程，均无法得到解析解。但上述的推力、空气动力、引力、控制力等各种因素对再入飞行器运动的影响不一样，如地球旋转和扁率的影响，对短射程的弹头再入弹道可以不考虑，这样方程可以简化。为了简化计算，便于分析，有必要对运动方程进行简化，而且根据质心运动和姿态运动的特点，运动方程也是可以简化的。下面讨论运动方程的简化问题。

§2.5 运动方程的简化

运动方程如何简化与研究的问题有关，如在飞行器设计初始阶段，为了粗略地了解飞行轨迹、飞行性能，仅需要研究质心运动，且飞行器尚未设计出来，有些系统和参数未完全确定，要进行精确的弹道计算不可能也无必要。再如对姿态控制系统进行设计分析，它主要是研究姿态运动，质心运动的影响可以忽略。因此，简化的方法是不同的。但归纳起来有三种简化方法：一种简化方法是把飞行器质心运动和飞行器绕质心运动分开，先不考虑绕质心的转动，而把飞行器当作可控制的质点，研究其质心运动，然后在此基础上研究飞行器绕质心运动对质心运动的影响，这样做的原因，如大气飞行器姿态动力学[5]所阐明的，质心运动和绕质心运动的运动特点是不一样的，相对而言，绕质心运动进行得快，而质心运动进行得较慢，在研究质心运动特性，如飞行速度 v、位置 r 时，可以认为绕质心运动处于“瞬时平衡”或者“配平状态”。这种简化方法在再入飞行器动力学与制导中得到广泛的应用。另一种简化方法是把空间运动分成纵向运动和侧向运动，认为二者的交连影响可以忽略。当然这是近似的，只有在飞行器的实际运动接近平面运动时，才是正确的。如弹道式导弹主动段的运动，当控制系统设计良好，其运动近似于平面运动，此时可将空间运动方程简化成纵向运动方程和侧向运动方程[1]。在飞行器再入动力学和制导中，除空间机动飞行弹道和精确计算弹道需要考虑空间运动外，一般是简化成平面运动问题，特别是研究最佳机动弹道多简化成平面运动。第三种简化方法是线性化运动方程。这是当质心和绕质心运动方程不能分开研究，又要研究其运动特性时常采用的方法，讨论问题时将非线性微分方程组简化成线性微分方程组，而且常进一步又分成纵向扰动运动和侧向扰动运动[4][5]。

本书主要讨论如何把质心运动和绕质心运动分开，在研究质心运动方程时，再进一步研究质心平面运动方程。

§2.5.1 质心的空间运动方程

前面建立了质心运动方程和绕质心运动方程。从动力学方程的角度讲，共有六个微分方程，其中质心运动动力学方程可以确定质心的三个速度分量，或者说一个速度的大小和两个速度方向角，如果再加上质心运动学三个关系，就可以决定质心的位置（x，y，z）或（ϕ，λ，r）。在飞行力学中习惯称质心弹道计算为三自由度弹道计算或称三自由度弹道仿真，它决定质心的位置和速度。而绕质心动力学方程可以决定再入飞行器绕质心转动角速度沿 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系各轴分解的三个角速度分量，如果再加上三个欧拉角微分方程，就可以决定再入飞行器的姿态（φ，ψ，γ）。在飞行力学中习惯称同时进行质心和绕质心运动的弹道计算为六自由度弹道计算或称六自由度弹道仿真，即三个质心运动自由度、三个姿态运动自由度。

六自由度弹道计算是较繁的，除了微分方程数增加外，主要是为了决定控制力矩的大小牵涉到姿态控制系统和误差的形成，同时姿态运动进行得较快，为了反映真实运动的情况，仿真计算步长必须选择得较小，这样计算工作量大大地增加，而且在再入飞行器设计初始阶段，很多参数并没完全确定，进行六自由度计算不可能也无必要。同时我们知道，飞行器绕质心运动相对于质心运动进行得快，它的动态过程对质心运动的影响不十分明显，可以认为作用在飞行器上的力矩随时处于“瞬时平衡”或者“配平状态”。所谓瞬时平衡状态系指作用在飞行器上的力矩随时处于平衡状态，而惯性力矩和阻尼力矩可以忽略，要做到这一点，必须假设控制系统是理想工作的，即无误差、无时间延迟、随时达到要求的舵偏角，而再入飞行器又是无惯性的，当有控制力矩时，稳

定力矩立刻与控制力矩达到力矩平衡，过渡到新的状态，忽略过渡过程。这种假设下得到的质心弹道，当绕质心运动不太剧烈，可以得到令人满意的结果；如果绕质心运动十分剧烈，就必须考虑飞行器转动对质心运动的影响，必要时必须用六自由度的弹道计算对三自由度弹道计算的结果进行验算。下面写出简化的空间质心运动方程。

1. *在返回坐标系列写的质心空间运动方程*

利用式（2-3-39）和式（2-3-40）可得：

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{z1}\end{bmatrix}+\frac{g_r'}{r}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix}+\frac{g_{\omega e}}{\omega_e}\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix}+\frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_{cx}\\ F_{cy}\\ F_{cz}\end{bmatrix}\\ +\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}-C_AqS\\ C_NqS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}\\ -C_NqS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}\end{bmatrix}-\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix}-\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2-5-1}$$

式（2-5-1）是把地球看作以角速度 ω_e 进行自转的旋转椭球体。如果不考虑地球自转，把地球看作是一圆球，且忽略姿态控制系统控制力的影响，则式（2-5-1）可进一步简化成：

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{z1}\end{bmatrix}-\frac{fM}{r^3}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix}+\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}-C_AqS\\ C_NqS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}\\ -C_NqS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{2-5-2}$$

2. 在半速度坐标系列写质心空间运动方程

如果认为地球为不旋转的圆球，且略去控制力，可将式(2-4-27)和式（2-4-28）简化成：

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{P_{zh}}{m} - \frac{C_x \rho v^2 S}{2m} - \frac{fM}{r^2}\sin\theta_T \\ \dot{\theta}_T &= \frac{P_{zh}}{mv} + \frac{C_y \rho v S}{2m}\cos\nu - \frac{C_z \rho v S}{2m}\sin\nu - \frac{fM}{r^2}\frac{\cos\theta_T}{v} + \frac{v\cos\theta_T}{r} \\ \dot{\sigma}_T &= \frac{-P_{zh}}{mv\cos\theta_T} - \frac{C_z \rho v S}{2m\cos\theta_T}\cos\nu - \frac{C_y \rho v S\sin\nu}{2m\cos\theta_T} + \frac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} \end{aligned}\right\} \tag{2-5-3}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r} \\ \dot{\lambda} &= \frac{-v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \\ \dot{r} &= v\sin\theta_T \end{aligned}\right\} \tag{2-5-4}$$

3. 控制变量和控制关系方程

为了控制再入飞行器的飞行轨迹，以满足飞行任务的要求，必须改变再入飞行器飞行速度的方向和大小。要改变速度的方向和大小又依赖控制力产生的控制力矩改变再入飞行器的姿态，进而改变推力和空气动力的大小和方向来产生所需要的力。

作用在再入飞行器上的力主要有推力 $\boldsymbol{P}$、空气动力 $\boldsymbol{R}$、控制力 F_c 和引力 mg。

引力 mg 是不能任意改变其大小和方向的，所以要改变速度大小和方向只有利用推力、空气动力和控制力。对再入飞行器来讲，推力 $\boldsymbol{P}$ 的主要作用是用于再入飞行器的返回制动，如卫星的返回制动、载人飞船和航天飞机的返回制动，通过姿态控制使制

动推力在要求的方向。而弹道式弹头再入、机动弹头的再入不存在推力制动。推力是否存在，以及推力是否产生力矩，用 δ_p 表示，$\delta_p=0$，表示推力为零，否则表示发动机工作，有推力作用。

而气动力 $\boldsymbol{R}$ 可以分解为阻力和总升力

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D} \tag{2-5-5}$$

空气阻力可以用来减速，但不能用来加速。总升力 $\boldsymbol{L}$ 垂直于速度方向，它是用来改变飞行器速度方向的主要因素。控制力 $\boldsymbol{F}_c$，对再入飞行器而言，产生控制力可以是小的火箭发动机，也可以是气动舵，前者如返回式卫星和载人飞船返回舱的姿态控制发动机，后者如再入机动弹头和航天飞机的空气舵。下面以空气舵为例对控制力 $\boldsymbol{F}_c$ 进行分析。空气舵可分为俯仰舵、偏航舵和滚动舵，相应的有等效俯仰舵偏角 δ_φ、等效偏航舵偏角 δ_ψ 和等效滚动舵偏角 δ_γ，简称俯仰舵偏角 δ_φ、偏航舵偏角 δ_ψ 和滚动舵偏角 δ_γ，它们分别产生俯仰控制力矩 M_{z1c}、偏航控制力矩 M_{y1c}、滚动控制力矩 M_{x1c}。

在临界舵偏角以内小舵偏角的情况下，可以认为

$$\left.\begin{aligned} F_{cx1} &= F_{cx1}(\delta_\varphi,\delta_\psi,\delta_\gamma) \\ F_{cy1} &= F_{cy1}^{\delta}\delta_\varphi \\ F_{cz1} &= F_{cz1}^{\delta}\delta_\psi \end{aligned}\right\} \tag{2-5-6}$$

对轴对称的再入飞行器，偏航舵与俯仰舵相同，可认为 $-F_{cy1}^{\delta}=F_{cz1}^{\delta}<0$.

而相应的滚动、偏航、俯仰控制力矩为：

$$\left.\begin{aligned} M_{x1c} &= M_{x1c}^{\delta}\delta_\gamma = -2F_{cz1}^{\delta}\delta_\gamma r_c \\ M_{y1c} &= M_{y1c}^{\delta}\delta_\psi = -F_{cz1}^{\delta}(x_c-x_g)\delta_\psi \\ M_{z1c} &= M_{z1c}^{\delta}\delta_\varphi = -F_{cz1}^{\delta}(x_c-x_g)\delta_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2-5-7}$$

其中 x_c-x_g 为空气舵铰链轴到质心的距离，即为控制力的力臂；r_c 为空气舵压力中心到纵轴 o_1x_1 的距离。

引力 mg 通过质心不产生绕质心的力矩，空气动力有稳定力矩 M_{st}、阻尼力矩 M_d。

从式（2-3-95）或者（2-4-42）看出，当已知初始条件要唯一地确定飞行器的运动，必须对三个舵偏角 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 和发动机是否工作的 δ_p 给出其变化规律，否则飞行弹道不确定。如果把描述再入飞行器运动的微分方程组看成是描述一个系统运动的微分方程组，则可以称速度、位置、角姿态等参数为系统的状态变量，而称三个舵偏角 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 和 δ_p 为控制变量。所以要确定系统的状态，必须给出控制规律。而 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 和 δ_p 的变化规律是由控制方程确定的。

控制方程就是确定舵偏角 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 和 δ_p 与运动参数之间的关系方程。在一般情况下，δ_φ、δ_ψ、δ_γ、δ_p 是再入飞行器的位置、速度、姿态角的函数，也与制导方法有密切的关系，具体方程将在后几章讨论，现可给出其一般方程。

$$\left.\begin{aligned}
&F_\varphi(\delta_\varphi,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\varphi_T,\dot{\varphi}_T\cdots)=0\\
&F_\psi(\delta_\psi,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\psi_T,\dot{\psi}_T\cdots)=0\\
&F_\gamma(\delta_\gamma,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\gamma_T,\dot{\gamma}_T\cdots)=0\\
&F_p(\delta_p,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\varphi_T,\psi_T,\gamma_T\cdots)=0
\end{aligned}\right\}\tag{2-5-8}$$

上面讲了对六自由度的弹道计算，可以认为控制变量为 δ_p、δ_φ、δ_ψ、δ_γ. 那么对三自由度的弹道计算，其控制变量、状态变量又是什么呢？对在返回坐标系列写的运动方程式（2-5-1）或者式（2-5-2），可认为状态变量为 v_x、v_y、v_z 和 x、y、z，而控制变量是什么呢？可以认为是 α、β、ν 和 δ_p，因为 α、β、ν 和 δ_p 确定了，式（2-5-1）当给定初值条件是可以进行数值积分求解的。因为要数值积分式（2-5-1）必须知 $\boldsymbol{O}_B$（φ，ψ，γ）和 F_{cx}、F_{cy}、F_{cz}. 而当 α、β、ν 已知时 $\boldsymbol{O}_B$ 是可以求出来的。

$$\boldsymbol{O}_B(\varphi,\psi,\gamma)=\boldsymbol{O}_H(\sigma,\theta)\boldsymbol{H}_B(\alpha,\beta,\nu)\tag{2-5-9}$$

当 v_x、v_y、v_z 已知时，σ、θ 可以利用式（2-3-75）得出：

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \mathrm{arctg}(v_y/v_x)\\ \sigma &= \arcsin(-v_z/v)\end{aligned}\right\} \tag{2-5-10}$$

而

$$\begin{bmatrix}F_{cx}\\F_{cy}\\F_{cz}\end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}F_{cx1}\\F_{cy1}\\F_{cz1}\end{bmatrix} \tag{2-5-11}$$

从式（2-5-6）看出 F_{cx1}、F_{cy1}、F_{cz1} 是舵偏角 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 的函数，根据瞬时平衡假设，δ_ψ、δ_φ 可以计算出来，而 δ_γ 可近似认为等于零。

由瞬时平衡假设知

$$\left.\begin{aligned}M_{y1c} &= M_{y1c}^{\delta}\delta_\psi = M_{y1st}(\alpha,\beta)\\ M_{z1c} &= M_{z1c}^{\delta}\delta_\varphi = M_{z1st}(\alpha,\beta)\end{aligned}\right\} \tag{2-5-12}$$

当 α、β 已知，由式（2-5-12）可得出 δ_φ、δ_ψ，再利用式(2-5-6) 可求出 F_{cx1}、F_{cy1}、F_{cz1}.

但实际工程设计中已将上述过程省去，给出了“瞬时平衡”下的空气动力系数，即将式（2-5-1）中的

$$\boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}-C_AqS\\ C_NqS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}\\ -C_NqS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{cx}\\F_{cy}\\F_{cz}\end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}-C_AqS+F_{cx1}\\ C_NqS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}+F_{cy1}\\ -C_NqS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}+F_{cz1}\end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{O}_B\begin{bmatrix}-C_{AB}qS\\ C_{NB}qS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}\\ -C_{NB}qS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}\end{bmatrix} \tag{2-5-13}$$

C_{AB}、C_{NB} 为平衡状态（或者配平状态）下的空气动力系数。在

有关部门给出气动系数时，应专门给出平衡状态下的空气动力系数，C_{AB}、C_{NB}中的下标 B 也不专门标出。如果认为给出的空气动力系数是平衡状态下的空气动力系数，则可以认为三自由度弹道计算的控制变量为 α、β、ν。

对在半速度坐标系列写的运动方程，从式（2-5-4）看出，状态变量为 v、θ_T、σ_T、ϕ、λ、r。而控制变量可更直接看出为 α、β、ν 和 δ_p，当然空气动力系数应该用平衡状态下的空气动力系数。

因为质心空间运动方程的控制变量为 α、β、ν 和 δ_p，只要给出 α、β、ν 的变化规律就可以确定质心弹道。人们正是利用这一点，选择不同的 α、β、ν 来达到不同的要求，例如对轴对称再入飞行器主要是研究如何控制 α、β 来满足某些主要要求，而对 ν 的要求是次要的。但对再入飞行器中的载人飞船返回舱，它主要研究 α 和 ν 的控制规律来满足某些主要要求，而对 β 的要求是次要的。又如可以选择最佳的 α、β、ν 来使某些指标最佳，如横程最大、速度损失最小等。这些便是下面几章要研究的内容。

§2.5.2 质心的平面运动方程

质心的空间运动方程虽反映了质心的空间运动，但从初步设计阶段确定飞行性能或选择最佳弹道的角度来看仍嫌复杂。当实际运动接近平面运动时，如再入弹头的弹道，因飞行时间短，可略去地球自转的影响，用平面弹道更方便。设再入弹道为平面弹道，如选返回坐标系为计算系，因再入弹道平面不与 $o_0x_0y_0$ 平面重合，则 x、y、z 没有一个恒为零，达不到简化的目的。如选再入时刻的地理坐标为再入坐标系，同样因 ex_ey_e 平面不与再入弹道平面重合，虽是平面运动，方程仍然得不到进一步的简化，除非再入平面弹道在子午面内。要再入弹道为平面弹道时，应作如下假设，且再入坐标系的 ex_e 要重新定义，才能简化运动方程。

简化假设：

①不考虑地球旋转，即 $\omega_e=0$；

②地球为一圆球，即引力加速度与地心距平方成反比，$g=\frac{fM}{r^2}$；

③认为再入飞行器的纵轴始终处于再入点速度矢量 v_e 与地心矢 r_e 所决定的平面内，即侧滑角 β 等于零；

④无推力作用。

根据上述假设，飞行器在理想条件下的运动将不存在垂直于由 v_e、r_e 组成的平面的侧向力，则再入段的运动为一平面运动。如图 2-18 可将再入坐标系 $e-x_e y_e z_e$ 坐标系的 ex_e 轴选在由（v_e，r_e）决定的平面内，垂直于 ey_e，且指向运动方向为正，因无垂直于 $ex_e y_e$ 平面的侧向力，则 $ex_e y_e$ 平面即为再入弹道平面。

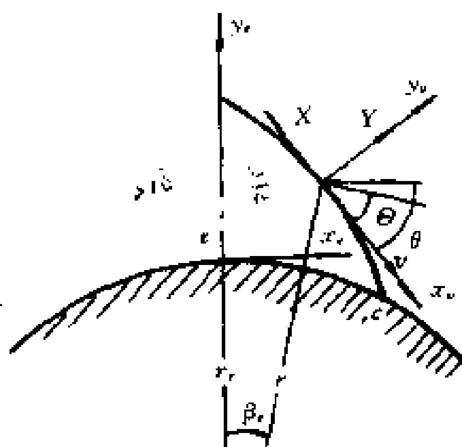


图 2-18 θ、Θ、β_e 的关系图

因无侧力，$\beta=0$，$z=0$，则式（2-5-2）可简化成：

$$m\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\end{bmatrix}=-mg\begin{bmatrix}\frac{x}{r}\\ \frac{R_0+y}{r}\end{bmatrix}+O_V\begin{bmatrix}-X\\ Y\end{bmatrix} \tag{2-5-14}$$

因 $\sigma=0$，$\nu=0$，O_V 可简化成：

$$O_V = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2-5-15}$$

由图 2-18 知:

$$\left.\begin{aligned} x/r &= \sin\beta_e \\ (R_0 + y)/r &= \cos\beta_e \end{aligned}\right\} \tag{2-5-16}$$

其中 β_e 为 $\boldsymbol{r}_e$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角，可称为射程角，称 $\beta_e R_0 = L$ 为再入射程。代式（2-5-15）、（2-5-16）入式（2-5-14）可得：

$$m\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = mg\begin{bmatrix} \sin\beta_e \\ \cos\beta_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -X \\ Y \end{bmatrix} \tag{2-5-17}$$

式（2-5-17）经积分虽可表示速度的大小，但不清晰，可将其投影到速度坐标系，将式（2-5-17）双方乘以矩阵 $\boldsymbol{V}_O$，可以得：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = -g\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\beta_e \\ \cos\beta_e \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} -X \\ Y \end{bmatrix} \tag{2-5-18}$$

展开式（2-5-18）

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{X}{m} - g\sin(\theta + \beta_e) \\ v\dot{\theta} &= \frac{Y}{m} - g\cos(\theta + \beta_e) \end{aligned}\right\} \tag{2-5-19}$$

由图 2-18 看出，若定义飞行速度对当地水平线的夹角为 Θ，则

$$\Theta = \theta + \beta_e \tag{2-5-20}$$

故

$$\theta = \Theta - \beta_e \tag{2-5-21}$$

而

$$\dot{\beta}_e = \frac{v\cos\Theta}{r} \tag{2-5-22}$$

代式（2-5-20）、（2-5-21）、（2-5-22）入式（2-5-19）可以得

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}v/\mathrm{d}t &= -X/m - g\sin\Theta \\
\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t &= \frac{Y}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v}\right)\cos\Theta \\
\mathrm{d}r/\mathrm{d}t &= v\sin\Theta \\
\mathrm{d}L/\mathrm{d}t &= R_0 v\cos\Theta/r
\end{aligned}\right\} \tag{2-5-23}
$$

式（2-5-23）共有四个未知数 v、Θ、r、L，而控制变量为 α，当给出 α 的变化规律和初值条件，积分式（2-5-23）就可以得弹道了。对于质心平面弹道，人们可以通过选择不同的 α 变化规律来达到不同的目的。如果不进行机动飞行，理论上讲 $\alpha=0$，称为零攻角再入，但如果在大气层外对弹头不进行稳定，即使弹头是静稳定的，因为进入大气层时，攻角 α 的任意性，攻角 α 仍有一个恢复过程，如大气飞行器姿态动力学[5]所讨论的。零攻角的再入称为"弹道再入"、"零升力再入"，而攻角 $\alpha\neq0$ 时的再入称为"有升力再入"或称为再入机动飞行。

§2.5.3 瞬时平衡状态下飞行器姿态角的确定

瞬时平衡（或称配平飞行）是一个很有用的假设，利用该假设可以得到质心空间运动方程。此时的控制变量为 α、β、ν，它们是已知的，当已知初始条件积分式（2-5-1）可以得到飞行器的速度 v_x、v_y、v_z，再利用式（2-5-10）可以得 θ 和 σ。从八个欧拉角的关系知，当已知 α、β、ν、θ、σ 是可以求出飞行器的姿态角的。

利用式 $\boldsymbol{O}_B$（φ，ψ，γ）$=\boldsymbol{O}_H$（θ，σ）$\boldsymbol{H}_B$（α，β，ν）可以得：

$$
\begin{aligned}
\sin\psi = &\sin\sigma\cos\alpha\cos\beta - \cos\sigma\sin\nu\sin\alpha \\
&+ \cos\sigma\cos\nu\cos\alpha\sin\beta \qquad -\pi/2 < \psi \leqslant \pi/2
\end{aligned} \tag{2-5-24}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\varphi = &[\sin\theta\cos\sigma\cos\alpha\cos\beta + (\sin\theta\sin\sigma\sin\nu \\
&+ \cos\theta\cos\nu)\sin\alpha - (\sin\theta\sin\sigma\cos\nu - \cos\theta\sin\nu)\cdot \\
&\cos\alpha\sin\beta]/\cos\psi
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\varphi = & [\cos\theta\cos\sigma\cos\alpha\cos\beta + (\cos\theta\sin\sigma\sin\nu \\
& - \sin\theta\cos\nu)\sin\alpha - (\cos\theta\sin\sigma\cos\nu + \sin\theta\sin\nu)\cdot \\
& \cos\alpha\sin\beta]/\cos\psi
\end{aligned}\right\}
$$

$$
-\pi < \varphi \leqslant \pi \tag{2-5-25}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\gamma = & [\sin\sigma\sin\alpha\cos\beta + \cos\sigma\sin\nu\cos\alpha \\
& + \cos\sigma\cos\nu\sin\alpha\sin\beta]/\cos\psi \\
\cos\gamma = & [-\sin\sigma\sin\beta + \cos\sigma\cos\nu\cos\beta]/\cos\psi
\end{aligned}\right\}
$$

$$
-\pi < \gamma \leqslant \pi \tag{2-5-26}
$$

此时的 φ、ψ、γ 的意义是如果再入飞行器严格地按需要的 α、β、ν 飞行，则其姿态角可由式（2-5-24）、（2-5-25）、（2-5-26）确定。或者反过来说，如姿态角由姿态控制系统控制到上述数值，则 α、β、ν 会达到要求的值。

第三章 再入飞行器运动方程的近似解

再入飞行器从大气层外返回再入大气层的轨道形式是多种多样的。可以从不同的角度加以分类。如从再入飞行器的类型分，可区分为弹头、人造卫星、载人飞船、航天飞机等的返回再入；从再入速度上分，有高速再入（$v<v_1$）、圆轨道速度再入（$v=v_1$）、超圆速度再入（$v>v_1$）；从有无升力分，有零升力再入（又称弹道再入）、有升力再入。有升力再入又细分为弹道—升力式再入（即小升阻比再入，其升阻比 $L/D\leqslant0.3\sim0.5$）和升力式再入（即大升阻比再入，其升阻比 $L/D>1\sim1.5$）。50 年代以来，很多作者根据不同的假设条件，得到了各自的近似解。因假设条件不同，处理问题的方法不同，所得到的结果也就不完全一致。由于所研究的问题不一样，如弹头总体设计，对弹头结构所能承受的最小负加速度（有时也称最大加速度，指绝对值，下同）、热流及烧蚀问题感兴趣，总体设计对近似解的要求是计算工作量小，只要求某些值计算误差不大，如切向加速度最大值 $|\dot{v}|_m$、热流最大值 q_{max} 等，但对射程计算的精确度要求就不高。反之对飞船和航天飞机的再入近似解，对射程的近似计算就要求算得快一些、准一些。因此评价近似解的优劣，要从各自的要求出发，并无统一的评判准则。

再入运动方程的近似解因再入时的倾角 Θ_e（也称再入角 Θ_e）和升阻比 L/D 的大小不同、近似程度不一样，其解的形式是各式各样的。有简单的、稍复杂一点的，也有虽是解析形式解，但求解公式较烦。在计算机运算速度不十分快时，求近似解得到不少学者的重视，其中弹道再入以艾伦（Allen）[7]的近似解最为著名。

对卫星、飞船的返回再入以查普曼（Chapman）[8]、罗赫（Loh）[9]、维赫（Vinh）等的近似解最为著名。还有一些作者得到的近似解，适用面广、精度也高，但计算也稍为复杂。目前计算机速度很高、也很普及，计算一条三自由度的质心弹道已经不是困难的事，可以用编好的程序对某一问题进行定量分析，因此再用较复杂的近似解求解运动方程已无必要。本书研究运动方程的近似解，只讨论简单的形式，而且按弹头再入、卫星和飞船再入、有升力飞行器再入的次序来讨论问题。

热流计算和防热系统设计是再入大气层最重要的问题之一，所以本书对防热系统设计的基础——热流计算也进行讨论。

§3.1　弹头再入时运动方程的近似解

弹头再入的飞行时间短，可以不考虑地球旋转和扁率的影响，可以利用平面质心弹道作为运动方程近似解的基础。由式(2-5-25)可得运动方程如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=-\frac{X}{m}-g\sin\Theta\\ \frac{d\Theta}{dt}&=\frac{Y}{mv}+\left(\frac{v}{r}-\frac{g}{v}\right)\cos\Theta\\ \frac{dr}{dt}&=v\sin\Theta\\ \frac{dL}{dt}&=\frac{v\cos\Theta}{r}R_0\end{aligned}\right\}\tag{3-1-1}$$

弹头再入的特点是：①在大气层外进行自旋，保持姿态稳定，使进入大气层时的攻角正好为零，所以理论上讲，它是零攻角再入，即零升力再入。②再入时的当地速度倾角$|\Theta_e|$较大。

弹头再入相当于升阻比$L/D=0$，而$|\Theta_e|$较大时的再入。由式(3-1-1)知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-C_x\frac{\rho v^2 S}{2m}-g\sin\Theta \tag{3-1-2}$$

速度的变化与大气密度的变化有关，而大气密度随高度的变化有近似表达式，所以返回再入时运动方程的近似解一般不以时间 t 为自变量，而以高度 h 为自变量。

由文献［1］知密度随高度的变化，可以查标准大气表、也可以在不同的高度用近似公式算，而最简单的是在 0—80km 范围内，取 $\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$，其中 ρ_0 为 $h=0$ 处的密度，β 近似为一常数，通常取 $\beta=1/72001/\mathrm{m}$.

因 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}h/v\sin\Theta$，则式（3-1-2）可改写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}=\frac{-C_x S\rho_0}{2m\sin\Theta}e^{-\beta h}v-\frac{g}{v}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}h}=-\beta\frac{C_x S\rho_0}{\beta m\sin\Theta}e^{-\beta h}v^2-2g \tag{3-1-3}$$

令

$$K_0=\frac{-C_x S\rho_0}{\beta m\sin\Theta}$$

则式（3-1-3）变成

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}h}-\beta K_0 e^{-\beta h}v^2+2g=0 \tag{3-1-4}$$

式（3-1-4）是一阶变系数微分方程，令 $t=0$ 时，$v=v_e$，$h=h_e$，$\rho=\rho_e$，积分式（3-1-4）可得：

$$v^2=v_e^2\mathrm{e}^{\int_{h_e}^{h}\beta K_0 e^{-\beta h}\mathrm{d}h}\left[1-\frac{2}{v_e^2}\int_{h_e}^{h}g\mathrm{e}^{-\int_{h_e}^{h}\beta K_0 e^{-\beta h}\mathrm{d}h}\mathrm{d}h\right] \tag{3-1-5}$$

又利用 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}h/v\sin\Theta$ 可以得：

$$t=\int_{h_e}^{h}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_{h_e}^{h}\beta K_0 e^{-\beta h}\mathrm{d}h}}{\sin\Theta\left[v_e^2-2\int_{h_e}^{h}g\mathrm{e}^{-\int_{h_e}^{h}\beta K_0 e^{-\beta h}\mathrm{d}h}\mathrm{d}h\right]^{1/2}}\mathrm{d}h \tag{3-1-6}$$

如 v 随高度的变化已知，可以较易得到切向过载 $n_x=C_x\rho v^2 S/2mg_0$，热流 $q_S=K_s\sqrt{\rho}\,v^3$ 随高度的变化。

求解速度、飞行时间随高度的变化，要积分式（3-1-5）和式（3-1-6）。从某种意义上讲，以前许多作者只是采用了不同的近似假设积分上述两个方程，得到了不同的结果。文献［9］曾对各种方法进行归纳整理。下面先讨论简单情况。

§3.1.1 不考虑重力影响时运动方程的近似解

弹头进入大气层时，再入角 Θ_e 是由主动段根据最佳弹道原则确定的。一般的 $|\Theta_e|$ 较大，同时弹头再入时，理论上是零攻角再入，升力为零。作用在弹头上的外力仅空气阻力和重力，而对 $|\Theta_e|$ 较大的弹道再入，其空气阻力除弹头刚刚进入大气层的一小段外，比重力大得多，简单分析时可略去重力，详细分析误差见文献［7］。

1. C_x 等于常数时运动方程的近似解

略去重力、弹头只受阻力作用，弹道为直线，$\Theta=\Theta_e$ 为常数。又因弹头出现过载 n_x 最大时，远程导弹弹头的飞行速度相当大，即飞行马赫数 M 很大，可以认为 C_x 为常数。当 C_x 为常数、Θ 为常数时，$K_0=-C_xS\rho_0/\beta m\sin\Theta$ 也为常数，式（3-1-5）变成

$$v^2=v_e^2\mathrm{e}^{\beta K_0\int_{h_e}^{h}\mathrm{e}^{-\beta h}\mathrm{d}h}=v_e^2\mathrm{e}^{-K_0(\mathrm{e}^{-\beta h}-\mathrm{e}^{-\beta h_e})} \tag{3-1-7}$$

故

$$\begin{aligned} v&=v_e\mathrm{e}^{-K_0(\mathrm{e}^{-\beta h}-\mathrm{e}^{-\beta h_e})/2}\\ &=v_e\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{C_xS\rho_0}{\beta m\sin\Theta}(\mathrm{e}^{-\beta h}-\mathrm{e}^{-\beta h_e})}=v_e\mathrm{e}^{\frac{B(\rho-\rho_e)}{\beta\sin\Theta}}\\ &=v_e\frac{\mathrm{e}^{B\rho/\beta\sin\Theta}}{\mathrm{e}^{B\rho_e/\beta\sin\Theta}} \end{aligned} \tag{3-1-8}$$

其中 $B=C_xS/2m$ 在《远程火箭弹道学》[1]中称为弹道系数，故

$$K_0=\frac{-2B\rho_0}{\beta\sin\Theta}=\frac{-C_xS\rho_0}{\beta m\sin\Theta}$$

不过要指出：此处的弹道系数不要与国外文献中的弹道参数 $\sigma=W/C_xS=mg_0/C_xS$ 搞混了，二者的关系是 $B\sigma=g_0/2$，可见二者的意义正好相反，分析时要注意，本书仍采用弹道系数 B.

由式（3-1-8）看出，v 随高度是变化的，故切向加速度随高度也是变化的。

$$\dot{v}=\frac{-C_xS}{2m}\rho_0 e^{-\beta h}v^2=\frac{-C_xS}{2m}\rho_0 v_e^2 e^{-\beta h}\frac{\exp\left(\frac{2B\rho_0 e^{-\beta h}}{\beta\sin\Theta}\right)}{\exp\left(\frac{2B\rho_0 e^{-\beta h_e}}{\beta\sin\Theta}\right)} \tag{3-1-9}$$

因为 $\dot{v}$ 是 h 的函数，下面可求出最小负加速度。令 $d\dot{v}/dh=0$，可以得：

$$\beta+\frac{2B\rho_0 e^{-\beta h}}{\sin\Theta}=\beta-K_0\beta e^{-\beta h}=0 \tag{3-1-10}$$

故 $\dot{v}_{min}$ 发生处高度 h_{m1} 由下式决定

$$h_{m1}=-\frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{K_0}=\frac{\ln K_0}{\beta}=\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{-C_xS\rho_0}{m\beta\sin\Theta_e}\right) \tag{3-1-11}$$

从式（3-1-11）看出，当 m 和 $|\Theta_e|$ 愈大，或 C_x、S 愈小，则最小负加速度出现的高度就愈低，而此高度与再入速度 v_e 的大小无关。

当 $h=h_{m1}=(\ln K_0)/\beta$ 时

$$v_{m1}=v_e e^{-1/2}/e^{(B\rho_e/\beta\sin\Theta_e)} \tag{3-1-12}$$

当所取的高度 h_e 很高时，$\rho_e\to 0$，则

$$v_{m1}=v_e e^{-1/2}=0.606v_e\approx 0.61v_e \tag{3-1-13}$$

式（3-1-13）说明，在上述假设下，再入弹头出现最小负加速度时，其速度大小与弹头的质量、尺寸和再入倾角无关，而只与再入速度大小 v_e 有关。

将此 v_{m1}、h_{m1} 代入式（3-1-9）可得：

$$\dot{v}_{min}=\frac{\beta\sin\Theta_e v_e^2}{2e^{(1+2B\rho_e/\beta\sin\Theta_e)}}$$

如果 ρ_e 很小，

$$\dot{v}_{min}=\frac{\beta\sin\Theta_e}{2e}v_e^2 \tag{3-1-14}$$

即最小负加速度在上述假设下，只与弹头再入时的速度倾角 Θ_e 和再入速度 v_e 有关，而与再入弹头的尺寸、重量无关。

从式（3-1-14）看出，再入速度 v_e 和再入角度 Θ_e 的大小均影响 v_{min} 的大小，但主要的是 Θ_e，所以减小 $|v_{min}|$ 最有效的方法是减小 $|\Theta_e|$.

利用式（3-1-6）不难求出从再入开始高度 h_e 飞到某一高度 h 时的飞行时间

$$t=\int_{he}^{h}\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta K_0\int_{he}^{h}e^{-\beta h}dh}}{v_e\sin\Theta_e}dh \qquad (3\text{-}1\text{-}15)$$

设 $$\int_{he}^{h}e^{-\beta h}dh=\frac{1}{\beta}(e^{-\beta h}-e^{-\beta h_e})\approx\frac{e^{-\beta h}}{\beta}$$

由式（3-1-8）知

$$v=v_e e^{-K_0/2e^{-\beta h}}$$

则 $$t=\frac{1}{v_e\sin\Theta_e}\int_{he}^{h}e^{\frac{K_0}{2}e^{-\beta h}}dh$$

令 $x=\frac{K_0}{2}e^{-\beta h}$，则 $dx=-\beta x dh$，上式变成

$$t=-\frac{1}{v_e\beta\sin\Theta_e}\int_{x_e}^{x}\frac{e^x}{x}dx \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

将 e^x 展开 $e^x=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i!}$

则 $$t=\frac{-1}{v_e\beta\sin\Theta}\left[\ln\frac{x}{x_e}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot i!}(x^i-x_e^i)\right] \qquad (3\text{-}1\text{-}17)$$

n 的大小取决于所需的计算精度。

2. C_x 等于常数时热流的计算和分析

再入飞行器再入时很重要的一个问题是防热问题。飞行器再入时，飞行器的巨大能量要通过大气的制动使机械能变成热能，并扩散到周围空气中去，它会使空气的温度达到摄氏几千度，由于再入飞行器表面的温度低，而围绕飞行器周围的空气温度很高，高

温气流要向飞行器传递热量。如何计算传递的热量，对再入飞行器的防热设计很重要。根据热量传递的多少，可计算烧蚀量及防热设计。准确确定热交换过程和结构的温度场是一个很复杂的问题，这不是本书讨论的问题，本书只讨论热流的计算公式，它是防热设计的基础。

热流计算主要有三个量：平均对流热流 q_{av} （W/m^2）、驻点的对流热流 q_s （W/m^2）、总吸热量 Q （J）。需要说明一点，热流量的大小与围绕再入飞行器表面的流场性质有关，由于出现最大热流的高度比较高、此时的雷诺数 $R_e=\rho vl/\mu$ 较小，围绕再入飞行器表面气流的流动为层流、所以下面的推导实际上仅是对流层流的热流计算公式，而且主要是用来比较不同弹道热流的差别，完全用它来确定结构的热环境是不够的。

（1）平均热流 q_{av}

$$q_{av} = \frac{1}{S_T}\int q \mathrm{d}s$$

其中 q 是再入飞行器表面单位时间单位面积由空气传给再入飞行器的热量。根据热力学的推导[7]可得

$$q_{av} = \frac{1}{4}C_f \rho v^3 \tag{3-1-18}$$

其中 C_f 为与再入飞行器外形等有关的常数

已知
$$v = v_e e^{B\rho/\beta\sin\Theta_e}$$

$$q_{av} = \frac{C_f}{4} v_e^3 \rho_0 e^{-\beta h} e^{\frac{3C_x S\rho_0}{2m\beta\sin\Theta_e} e^{-\beta h}} \tag{3-1-19}$$

由式（3-1-19）看出，q_{av} 为飞行高度 h 的函数，故可以求出出现 $(q_{av})_{max}$ 处的高度为：

$$h_{m2} = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{3C_x S\rho_0}{2\beta m\sin\Theta_e}\right) \tag{3-1-20}$$

而此时的速度、最大平均热流为：

$$v_{m2} = v_e e^{-1/3} \approx 0.72 v_e \tag{3-1-21}$$

$$(q_{av})_{\max} = \frac{-\beta}{6e}\left(\frac{C'_f}{C_x S}\right) m v_e^3 \sin\Theta_e \tag{3-1-22}$$

（2） 驻点热流 q_s

驻点热流是头部驻点的热流，它是最严重的情况，根据热力学推导[7]可得：

$$q_s = k_s \sqrt{\rho}\, v^3 \tag{3-1-23}$$

其中 k_s 取决于头部的形状。将 v、ρ 代入上式

$$q_s = k_s \sqrt{\rho_0}\, v_e^3 e^{-\beta h/2} \exp\left(\frac{3C_x \rho_0 S e^{-\beta h}}{2\beta m \sin\Theta_e}\right) \tag{3-1-24}$$

因 q_s 是 h 的函数，故可求出出现 $(q_s)_{\max}$ 的高度

$$h_{m3} = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{-3C_x \rho_0 S}{\beta m \sin\Theta_e}\right)$$

而此时的速度，最大驻点热流为：

$$v_{m3} = v_e e^{-1/6} \approx 0.85 v_e \tag{3-1-26}$$

$$(q_s)_{\max} = k_s \sqrt{\frac{-\beta m \sin\Theta_e}{3eC_x S}}\, v_e^3 \tag{3-1-27}$$

对驻点热流，更准确一点公式应为：

$$q_s = \frac{k_s}{\sqrt{r}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \left(\frac{v}{v_1}\right)^m \tag{3-1-28}$$

其中 r 为头部半径，$v_1 = \sqrt{gr}$ 为圆周速度，m、n 可取理论计算值或者实验值，但 n 不一定等于 1/2，m 也不一定等于 3[10]。

（3） 总吸热量 Q

总吸热量按下式计算

$$Q = \int_0^t q_{av} S_T \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{C_f \rho v^3 S_T}{4} \mathrm{d}t \tag{3-1-29}$$

将 ρ、v 的近似表达式代入可得：

$$Q = \frac{1}{4}\frac{C'_f S_T}{C_x S} m v_e^2 \left[e^{\frac{2B\rho_e}{\beta \sin\Theta_e}} - e^{\frac{2B\rho}{\beta \sin\Theta_e}}\right]$$

如 h_e 选择得很大，$\rho_e \to 0$，$e^{2B\rho_e/\beta\sin\Theta_e} \to 1$，而落点的 $v_f = v_e e^{B\rho_f/\beta\sin\Theta_e}$

则
$$Q = \frac{m}{4}(\frac{C_f S_T}{C_x S})(v_e^2 - v_f^2) \tag{3-1-30}$$

(4) 对 $(\dot{v})_{min}$、$(q_{av})_{max}$、$(q_s)_{max}$ 和 Q 的分析

将平均热流、驻点热流、最小负加速度的公式放在一起。

产生最小负加速度处的高度和速度

$$h_{m1} = \frac{1}{\beta}\ln(-\frac{C_x S\rho_0}{m\beta\sin\Theta_e})$$

$$v_{m1} = e^{-1/2}v_e \approx 0.61v_e$$

产生平均热流最大处的高度和速度

$$h_{m2} = \frac{1}{\beta}\ln(-\frac{3}{2}\frac{C_x S\rho_0}{m\beta\sin\Theta_e})$$

$$v_{m2} = e^{-1/3}v_e \approx 0.72v_e$$

产生驻点热流最大处的高度和速度

$$h_{m3} = \frac{1}{\beta}\ln(-3\frac{C_x S\rho_0}{m\beta\sin\Theta_e})$$

$$v_{m3} = e^{-1/6}v_e = 0.85v_e$$

从中可以看出 h_{m1}、h_{m2}、h_{m3} 和 v_{m1}、v_{m2}、v_{m3} 有类似的表达式，仅有些常数值不同。若 C_x、S、Θ_e 相同，则再入过程中先出现驻点热流最大点，然后出现平均热流最大点，最后才是最小负加速度出现点，且共同的是出现的高度均与再入速度无关。当然相应的速度由大到小，而且出现的速度值只与再入速度 v_e 有关，与飞行器重量、尺寸及再入角 Θ_e 无关。

下面分析最小负加速度及最大平均热流、最大驻点热流的特点，由式（3-1-14）、（3-1-21）和（3-1-26）知：

最小负加速度

$$\dot{v}_{min} = \frac{\beta\sin\Theta_e}{2e}v_e^2$$

最大平均热流

$$(q_{av})_{max} = \frac{-\beta}{6e}\left(\frac{C_f}{C_x S}\right) m v_e^3 \sin\Theta_e$$

最大驻点热流

$$(q_s)_{max} = k_s \sqrt{\frac{-\beta m \sin\Theta_e}{3eC_x S}} v_e^3$$

可见最小负加速度 $\dot{v}_{min}$ 与结构、尺寸无关，但最大驻点热流和最大平均热流与 m、C_x、S、C_f、k_s 等有关。但共同的是与再入速度 v_e 和再入倾角 Θ_e 有关，从减小过载和热流的观点，$|\Theta_e|$ 较小是较合适的。另外减小 $(q_{av})_{max}$ 和 $(q_s)_{max}$ 还可以通过增大 C_x 和减小 m 来达到，从式（3-1-27）看出，增加头部半径 r，即钝头也可以减小热负荷，但这些显然与空气动力学要求减小阻力是不同的。总的来说，减小最大驻点热流 $(q_s)_{max}$ 和减小过载 $|\dot{v}|/g$，减小 $|\Theta_e|$ 是较合适的。但从总吸热量的角度看，$|\Theta_e|$ 减小过份，并不合适，因为 $|\Theta_e|$ 减小，飞行时间增加，由 $v_f = v_e \exp(B\rho_f/\beta\sin\Theta_e)$ 知 v_f 将减小，由式（3-1-30）看出，当 v_f 减小，则总吸热量会增加，这是因为 q_{av} 有所减小，但总的飞行时间长，总吸热量还是增加。因此综合上面两个因素合理地选择一个再入倾角是再入弹道设计中要解决的一个重要问题。

3. C_x 不等于常数时运动方程的近似解

上面讨论的是 C_x 等于常数的情况，它仅适合于 M 数较大的情况，当 M 数较小或者要求更精确一些时，C_x 不能看作常数。弹头的 C_x 与马赫数 M 和高度 h 的关系如图 3-1 和图 3-2 所示。

文献［12］指出对一个球—锥外形的弹头，通过计算和拟合，C_x 可以拟合成：

$$C_x = C_{xf} v^n \tag{3-1-31}$$

其中 C_{xf}、n 为常数，它是由拟合阻力曲线得到的，它的大小与弹头的形状和速度范围有关，即超音速和高超音速，C_{xf} 和 n 可以取

不同的值。由于 C_x 还是飞行高度的函数，文献[15]认为取如下关系更合适

$$C_x = C_{xf} v^n e^{-\alpha h} \tag{3-1-32}$$

其中 α 为常数。将 C_x 逼近成式（3-1-32）这种形式，是因为只有这种形式，式（3-1-3）在略去重力影响后，才可以积分得到解析

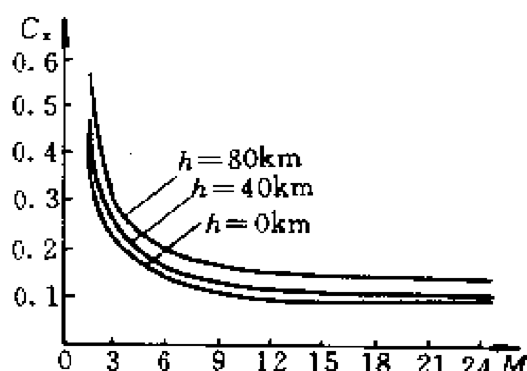


图 3-1　C_x 与 M 数的关系

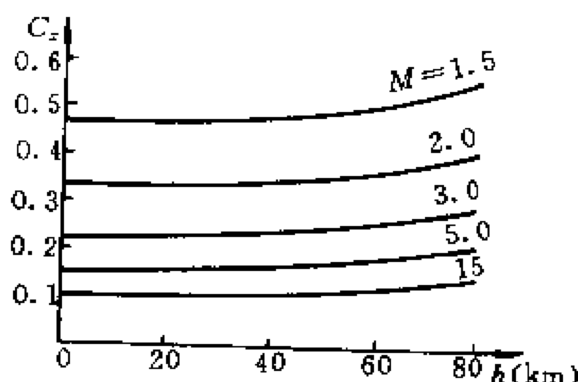


图 3-2　C_x 与 h 的关系

解。

将式（3-1-32）代入式（3-1-3），略去重力影响，可以得：

$$\frac{dv^2}{dh} = -\frac{C_x S\rho_0}{m\sin\Theta_e} e^{-\beta h} v^2$$

$$= -\frac{C_{xf} v^n e^{-\alpha h} e^{-\beta h} \rho_0 S v^2}{m\sin\Theta_e}$$

$$v^{-(n+1)} dv = \frac{C_{xf} S\rho_0}{2m\nu\sin\Theta_e} e^{-\nu h} d(-\nu h)$$

$$= \frac{B_f \rho_0}{\nu \sin\Theta_e} e^{-\nu h} d(-\nu h) \qquad (3\text{-}1\text{-}33)$$

其中 $B_f = \dfrac{C_{xf} S}{2m}$，$\nu = \alpha + \beta$，$B_f$、$\nu$ 为常数

积分式（3-1-33）得：

$$v = [v_e^{-n} - \mu(e^{-\nu h} - e^{-\nu h_e})]^{-\frac{1}{n}} \qquad (3\text{-}1\text{-}34)$$

其中 $\mu = B_f n \rho_0 / \nu \sin\Theta_e$，它也是常数。

当 h_e 选择足够大，$e^{-\nu h_e}$ 趋近于零，则式（3-1-34）简化成

$$v = [v_e^{-n} - \mu e^{-\nu h}]^{-1/n} \qquad (3\text{-}1\text{-}35)$$

式（3-1-35）表示考虑 C_x 是速度、高度的函数时，速度和高度的变化关系。利用式（3-1-35）可以求 $\dot{v}$ 随高度的变化。

因 $\dot{v} = -C_{xf} \rho v^2 S / 2m$，将 $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$ 和式（3-1-35）代入 $\dot{v}$ 式中可得：

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -B_f \rho_0 v^{n+2} e^{-\nu h} \\ &= -B_f \rho_0 e^{-\nu h} [v_e^{-n} - \mu e^{-\nu h}]^{-(n+2)/n} \end{aligned} \qquad (3\text{-}1\text{-}36)$$

$\dot{v}$ 是高度 h 的函数，可以求出最小负加速度，令 $\partial \dot{v} / \partial h = 0$，可以得最小负加速度出现处的速度 v_m、高度 h_m 应满足的条件：

$$e^{-\nu h_m} = -\frac{\nu \sin\Theta_e}{(n-2) B_f \rho_0} v_m^{-n} \qquad (3\text{-}1\text{-}37)$$

将式（3-1-35）代入式（3-1-37）可以得

$$h_m = \frac{1}{\nu} \ln\left[\frac{-C_{xf} S \rho_0}{m \nu \sin\Theta_e} v_e^{-n}\right] \qquad (3\text{-}1\text{-}38)$$

将式（3-1-38）代入式（3-1-37）和式（3-1-36）可以得：

$$v_m = v_e \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} \qquad (3\text{-}1\text{-}39)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\min} &= \frac{\nu \sin\Theta_e}{n+2} v_e \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-2/n} \\ &= \frac{\nu \sin\Theta_e}{n+2} v_m^2 \end{aligned} \qquad (3\text{-}1\text{-}40)$$

因为 $\Theta=\Theta_e=$ 常数，射程 S 也可以得到解析解

$$S=R\operatorname{tg}\Theta_e\int_{h_e}^{h}\frac{\mathrm{d}h}{R_0+h}=R_0\operatorname{tg}\Theta_e\ln\left(\frac{r}{r_e}\right) \tag{3-1-41}$$

同理可得到计算热流的公式

$$q_{av}=\frac{1}{4}C_f\rho_0\mathrm{e}^{-\beta h}\left[v_e^{-n}-\mu\mathrm{e}^{-sh}\right]^{-3/n} \tag{3-1-42}$$

$$q_s=k_s\sqrt{\rho_0}\,\mathrm{e}^{-\beta h/2}\left[v_e^{-n}-\mu\mathrm{e}^{-sh}\right]^{-3/n} \tag{3-1-43}$$

根据 q_{av}、q_s 是 h 的函数，可以求出 q_{av}，q_s 最大值发生处的高度及最大值。

文献［15］给出了一个例子，对数值积分的结果与近似解进行了比较，说明考虑了 C_x 随高度变比不考虑随高度的变化更接近数值积分的结果。

在《弹道导弹弹头运动解析解》[12]一文中指出，C_x 与速度的关系，以某一速度 v_B 为分界点，拟合成 $C_x=C_{xf}v^n$ 中的 C_{xf} 及 n 是不同的。而 $\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\beta h}$ 也应以某一高度 y_p 为分界点，ρ_0 及 β 值应取不同的值，这样更符合实际情况。作者指出，这样做的结果，只要马赫数 $M>1$，其解析解可以提供较精确的结果。

§3.1.2 考虑重力作用时运动方程的近似解

1. C_x 等于常数时的运动方程的近似解

考虑重力作用，Θ 角就不等于常数，$K_0=-C_xS\rho_0/\beta m\sin\Theta$ 也就不等于常数，故不易求得近似解。为了近似求速度的大小，可以分段取 K_0，认为在每一段内，它取为常数，又重力加速度 $g=g_0R_0^2/(R_0+h)^2$，因再入射程较短，也可以近似取 $g=g_0$，则

$$v=v_e e^{-\frac{K_0}{2}\left(e^{-\beta h}-e^{-\beta h_e}\right)}\left[1+\frac{2g_0}{v_e^2\beta}\int_{h_e}^{h}\frac{\mathrm{e}^{K_0\mathrm{e}^{-\beta h}}\mathrm{d}K_0\mathrm{e}^{-\beta h}}{K_0\mathrm{e}^{K_0\mathrm{e}^{-\beta h_e}}\mathrm{e}^{-\beta h}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3-1-44}$$

如果 h_e 较大，则 $e^{K_0e^{-\beta h_e}}\approx 1$，以下推导均令 $e^{K_0e^{-\beta h_e}}=1$. 令 $K_0e^{-\beta h}=y$

$$\int_{h_e}^{h}\frac{e^{K_0e^{-\beta h}}}{K_0e^{-\beta h}}\mathrm{d}K_0e^{-\beta h}=\int_{y_e}^{y}\frac{e^y}{y}\mathrm{d}y=F(y)-F(y_e)$$

将 e^y 展开积分得

$$\int_{y_e}^{y}\frac{e^y}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{y}{y_e}+\sum_{i=1}^{n}\frac{y^i}{i\cdot i!}\Big|_{y_e}^{y}$$

故

$$\begin{aligned}v&=v_e\mathrm{e}^{-\frac{K_0}{2}(e^{-\beta h}-e^{-\beta h_e})}\{1+\frac{2g}{v_e^2\beta}[F(y)-F(y_e)]\}^{1/2}\\&=v_e\mathrm{e}^{-\frac{K_0}{2}(e^{-\beta h}-e^{-\beta h_e})}\{1-\frac{2g}{v_e^2\beta}[\ln\frac{y}{y_e}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot i!}(y^i-y_e^i)]\}^{1/2}\end{aligned}$$

(3-1-45)

在求速度时，认为 Θ 为常数，在飞行时间长时有较大的误差，为了估计 Θ 的变化，可用动量矩定理求 Θ 的变化。

飞行器对地心的动量矩为 $mvr\cos\Theta$，重力通过重心不产生力矩，阻力产生的外力矩为 $-rC_x\rho v^2S\cos\Theta/2$，由动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rv\cos\Theta)=-r\frac{C_xS\rho_0}{2m}\mathrm{e}^{-\beta h}v^2\cos\Theta$$

$$\frac{\mathrm{d}(rv\cos\Theta)}{\mathrm{d}h}=-\frac{C_xS\rho_0}{2m\sin\Theta}\mathrm{e}^{-\beta h}(rv\cos\Theta)$$

$$\ln(\frac{rv\cos\Theta}{r_ev_e\cos\Theta_e})=-\frac{K_0}{2}(\mathrm{e}^{-\beta h}-\mathrm{e}^{-\beta h_e})\tag{3-1-46}$$

故

$$\cos\Theta=\frac{r_ev_e\cos\Theta_e}{rv}\mathrm{e}^{-K_0(e^{-\beta h}-e^{-\beta h_e})/2}\tag{3-1-47}$$

由式（3-1-45）求出 v，代入式（3-1-47）即求得 Θ 随高度的变化。

2. C_x 不等于常数时运动方程的近似解

上面近似解虽考虑了重力的影响，但仍然设 C_x 为常数，如前

所述C_x应该是速度和高度的函数。下面介绍不考虑Θ变化时，考虑重力作用，且C_x为v、h的函数时的近似解[15]。

因
$$\frac{dv}{dt}=-C_x\frac{\rho v^2 S}{2m}-g\sin\Theta \tag{3-1-48}$$

将$\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$，$C_x=C_{xf}v^{\nu}e^{-\alpha h}$代入式（3-1-48），且令$B_f=C_{xf}S/2m$，$\nu=\alpha+\beta$，可得

$$dv=[-\frac{B_f\rho_0}{\sin\Theta}v^{n+1}e^{-\nu h}-\frac{g}{v}]dh \tag{3-1-49}$$

令
$$dv=dv_1+dv_2 \tag{3-1-50}$$

$$dv_1=-\frac{B_f\rho_0}{\sin\Theta}v^{n+1}e^{-\nu h}dh \tag{3-1-51}$$

$$dv_2=-\frac{g}{v}dh \tag{3-1-52}$$

故
$$v=\int_0^t dv_1+\int_0^t dv_2 \tag{3-1-53}$$

一般地说，式（3-1-53）右边的式是不能积出来的，但考虑到实际阻力产生的速度变化远大于重力产生的速度变化，为此假设：

①忽略重力影响求积分$\int_0^t dv_1$，如前述积分可得：

$$v_1=\int_0^t dv_1=[v_e^{-n}-\mu e^{-\nu h}]^{-1/n} \tag{3-1-54}$$

②考虑重力作用的修正

因为重力的影响小，可以把重力的影响看成对v_1的一个修正

$$\Delta v=\int_0^t dv_2=\int_{h_e}^{h}-\frac{g}{v}dh=\int_0^t-g\sin\Theta dt=-g\sin\Theta t \tag{3-1-55}$$

如果认为考虑重力作用和C_x不是常数，飞行至某一高度的时间同不考虑重力作用和C_x等于常数飞行至同一高度的时间相同，则式（3-1-55）中的t可用式（3-1-17）求出。

故 $$v = v_1 + \Delta v = (v_e^{-n} - \mu e^{-\alpha h})^{-1/n} - gt\sin\Theta \tag{3-1-56}$$

$$\dot{v} = -B_f \rho_0 e^{-\alpha h} v^{n+2} - g\sin\Theta \tag{3-1-57}$$

重力对弹头再入运动的影响，主要在空气动力很小时的再入开始段和速度较小时的再入末端。除此之外，如果分析过载的最大值、最大热流值是可以不考虑重力的。

§3.2 人造卫星和载人飞船再入时运动方程的近似解

弹头的再入，除机动弹头再入外，其再入的特点是零攻角、大倾角$|\Theta_e|$的再入，再入时其轴向过载很大，由于无人，加上适当的热防护措施是可以完成任务的。对于人造卫星，一般由于装有回收的仪器舱，再入速度倾角$|\Theta_e|$不能过大，而载人飞船由于载人和有仪器，受过载及热环境的限制，也不能采用大倾角$|\Theta_e|$的再入，因为随着再入倾角$|\Theta_e|$的加大，过载要急剧增加，热流也急剧增加。为了减小过载和热流、增加机动能力，最好采用有升力的再入，但载人飞船是靠重心的横移来产生攻角，而横移不可能很大、所以攻角不能很大，升阻比也就不会很大。因此人造卫星和载人飞船的再入属于小倾角、小升阻比（或零升阻比）的再入。关于这方面的近似解有很多，本节主要介绍查普曼(Chapman)方程[8]。

§3.2.1 小倾角和小升阻比再入时运动方程的简化

飞行器小倾角再入时，不能像弹头那样忽略重力和认为$|\Theta|$角为常数，因此不易得到近似解析解。人们另辟途径，在一定的假设条件下，把决定速度大小和方向的方程，由二个非线性微分方程化简成一个无因次的非线性微分方程，虽然此无因次的非线性微分方程得不到解析解，但它是无因次的，可以通过数值积分得到其弹道特性，而这种特性可适应不同类型的再入飞行器，只

要它们的无因次方程相同，它们的特性就可以得到。

查普曼方程表示速度向量不是用 v 和 Θ，而是用 u、v_r 来表示。u 表示沿当地水平方向的速度，向前为正；v_r 表示沿地心矢 r 方向的速度，向上为正。则

速度大小 $v=\sqrt{v_r^2+u^2}$ (3-2-1)

速度方向 $\mathrm{tg}\Theta=\frac{v_r}{u}$ (3-2-2)

令 $\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{i}^0+u\boldsymbol{j}^0$

其中 $\boldsymbol{i}^0$、$\boldsymbol{j}^0$ 为 v_r、u 方向上的单位向量

则
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_r\boldsymbol{i}^0+\dot{u}\boldsymbol{j}^0+v_r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}^0}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}^0}{\mathrm{d}t}$$
$$=(\dot{v}_r-\frac{u^2}{r})\boldsymbol{i}^0+(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{uv_r}{r})\boldsymbol{j}^0 \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

再将空气动力 X、Y、重力 mg 投影到 $\boldsymbol{i}^0$、$\boldsymbol{j}^0$ 方向得：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{uv_r}{r}=-\frac{X}{m}(\cos\Theta+\frac{Y}{X}\sin\Theta)\\ \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}-\frac{u^2}{r}=-g+\frac{Y}{m}\cos\Theta-\frac{X}{m}\sin\Theta\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_r\\ \mathrm{tg}\Theta=\frac{v_r}{u}\end{cases}$$

对于平面弹道而言，$Y=L$，$Y/X=L/D$. 为了与国外航天动力学方面的书刊符号一致，升阻比 Y/X 用 L/D 表示，阻力 X 用 D 表示，C_x 用 C_D 表示，上式可改写成：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{uv_r}{r}=\frac{-D}{m}(\cos\Theta+\frac{L}{D}\sin\Theta)\\
&\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}-\frac{u^2}{r}=-g+\frac{L}{m}\cos\Theta-\frac{D}{m}\sin\Theta\\
&\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_r\\
&\mathrm{tg}\Theta=\frac{v_r}{u}
\end{aligned}\right\}\tag{3-2-4}$$

查普曼为了简化上述方程作了两个假设：

①认为在所研究的弹道段内，距离的相对变化 $\mathrm{d}r/r$ 与周向速度的相对变化 $\mathrm{d}u/u$ 相比是比较小的，即 $\mathrm{d}r/r\ll\mathrm{d}u/u$，也就是

$$\frac{|\mathrm{d}r/r|}{|\mathrm{d}u/u|}\ll 1$$

②对于有升力的再入飞行器，$|\Theta|$ 角足够的小，使 $L\sin\Theta\ll D\cos\Theta$，即 $L/D\mathrm{tg}\Theta\ll 1$

采用上述两个假设，方程式（3-2-4）可进行简化。因

$$\frac{|uv_r/r|}{|\mathrm{d}u/\mathrm{d}t|}=\frac{|u\mathrm{d}r/\mathrm{d}t|}{|r\mathrm{d}u/\mathrm{d}t|}=\frac{|\mathrm{d}r/r|}{|\mathrm{d}u/u|}$$

由假设①知 $|\mathrm{d}r/r|/|\mathrm{d}u/u|\ll 1$，即 $\frac{|\mathrm{d}u|}{|\mathrm{d}t|}\gg\frac{uv_r}{r}$。

由假设②知 $D\cos\Theta\gg L\sin\Theta$

因此，式（3-2-4）中的第一个方程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}\cos\Theta\tag{3-2-5}$$

关于近似假设①、②的近似程度，文献[8]进行了分析，在人们感兴趣的弹道段，其误差是较小的，特别是分析弹道上主要特征参数，如最大过载、最大热流对结构参数的影响是可以用的。

方程式（3-2-4）是以时间 t 为自变量，它是三个一阶微分方程，如果消去时间变量 t，而以其它弹道参数为自变量，可以降低其阶次。新的自变量的选取应考虑自变量的单值性，如以高度为

自变量，对有跳跃的轨道，高度就不是单值的。查普曼采用的是速度（或速度的函数）作新的自变量，它只能适用于空气动力较重力大的情况，对再入开始的一小段不适用，因为此时的阻力小于重力，速度不仅不减小，还有增加，而且假设①也要求空气动力较大时才成立。所以一般要从 $v=(0.995-0.99)v_e$ 开始用查普曼方程。另外在再入段末端弹道，因为此时的 $|\Theta|$ 角较大，再采用 $(L/D)\mathrm{tg}\Theta\ll 1$ 已不适合，故以 v 为自变量的适用范围在 $0.99v_e \geqslant v > (0.1\sim0.15)v_e$ 内。关于最大热流、最小负加速度、$-(L/D)\mathrm{tg}\Theta=1$ 各点情况如图 3-3.

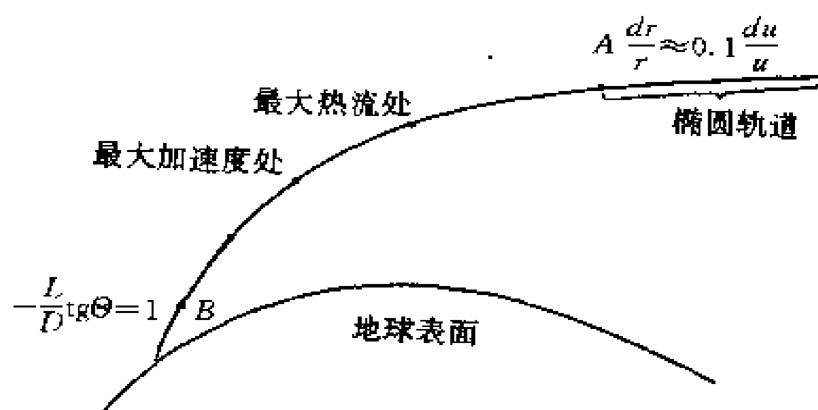


图 3-3 最大热流、最小负加速度出现处示意图

查普曼方程不能适用于再入弹道的全过程，是因为它作了两个近似假设，且选取速度为自变量，这个缺陷如果改用

$$S=\int_0^t \frac{v}{r}\cos\Theta \mathrm{d}t \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

为自变量是可以克服的。因为只要 $|\Theta|<90°$，则 $\cos\Theta>0$，自变量 S 是严格递增的。对于常升阻比的飞行器，$|\Theta|<90°$ 的条件是满足的，相应地可以推导出以 S 为自变量的微分方程，它首先是由维赫（Vinh）和布瑞斯（Brace）得到的。本书采用查普曼方程，详见参考文献［2］。

引入无因次周向速度 $\bar{u}=u/u_1=u/\sqrt{gr}$，式（3-2-5）变成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sqrt{gr}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\rho_0 e^{-\beta h}C_D S}{2m}\frac{u^2}{\cos\Theta} \tag{3-2-7}$$

而式（3-2-4）第二式变成

$$-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}=1-\bar{u}^2+\frac{\rho_0 C_D S r\bar{u}^2 e^{-\beta h}}{2m\cos^2\Theta}(\sin\Theta-\frac{L}{D}\cos\Theta) \tag{3-2-8}$$

为了把式（3-2-7）和式（3-2-8）两个方程简化成一个方程，引入新变量

$$Z=\frac{\rho_0}{2m/(C_D S)}\sqrt{\frac{r}{\beta}}\bar{u}e^{-\beta h} \tag{3-2-9}$$

并求得 $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\bar{u}}=Z'=\frac{Z}{\bar{u}}+\sqrt{\beta r}\sin\Theta$

即 $Z'-\frac{Z}{\bar{u}}=\sqrt{\beta r}\sin\Theta$

而

$$-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{\mathrm{d}\ (\bar{u}\sin\Theta/\cos\Theta)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\beta g}}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{u}Z''}{\cos\Theta}+\frac{\bar{u}\sqrt{\beta r}\sin^2\Theta}{\cos^2\Theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\bar{u}}\right) \tag{3-2-10}$$

将 $\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{g\beta}\frac{\bar{u}Z}{\cos\Theta}$ 代入式（3-2-10）得

$$\frac{\bar{u}Z}{\cos^2\Theta}\{\bar{u}Z''+\mathrm{tg}^2\Theta[\bar{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{u}}(Z'-\frac{Z}{\bar{u}})]\}=-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} \tag{3-2-11}$$

式（3-2-8）可以改写成

$$1-\bar{u}^2+\frac{\bar{u}Z}{\cos^2\Theta}[Z'-\frac{Z}{\bar{u}}-\sqrt{\beta r}\frac{L}{D}\cos\Theta]=-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} \tag{3-2-12}$$

式（3-2-11）和式（3-2-12）相比得：

$$\bar{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{u}}(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\bar{u}}-\frac{Z}{\bar{u}})-\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta+\sqrt{\beta r}\frac{L}{D}\cos^3\Theta=0 \tag{3-2-13}$$

展开（3-2-13）得：

$$\bar{u}Z'' - (Z' - \frac{Z}{\bar{u}}) = \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta - \sqrt{\beta r}\,\frac{L}{D}\cos^3\Theta$$

（3-2-14）

式（3-2-14）是 Chapman 方程，其中各项按其物理意义为：

$\bar{u}Z''$——相当于加速度的垂直分量；

$Z' - \frac{Z}{\bar{u}} = \sqrt{\beta r}\sin\Theta$——相当于阻力的垂直分量；

$\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta$——相当于重力和离心力的分量；

$\sqrt{\beta r}\frac{L}{D}\cos^3\Theta$——相当于升力的分量。

但应指出：讨论式（3-2-14）的物理意义不是指式（3-2-14）中相应的投影力和式（3-2-4）各项之间有正比关系，只是指式（3-2-14）的结构符合于式（3-2-4）第二方程的结构，并在此基础上导出查普曼方程。

若已知 $Z(\bar{u})$ 的关系，则可以较简单地用 $\bar{u}$ 和 Z 表示如下一些参数：

（1）加速度的水平分量

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{g\sqrt{\beta r}\bar{u}Z}{\cos\Theta} \tag{3-2-15}$$

或者用过载的水平分量

$$\frac{-(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)}{g} = \frac{\sqrt{\beta r}\bar{u}Z}{\cos\Theta}$$

对于地球及小再人倾角 $\sqrt{\beta r}\approx 30$，$\cos\Theta\approx 1$

$$-(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)/g \approx 30Z\bar{u} \tag{3-2-16}$$

式（3-2-16）在有关文献中经常引用。

（2）弹道倾角

$$\sin\Theta = \frac{1}{\sqrt{\beta r}}(Z' - \frac{Z}{\bar{u}}) \tag{3-2-17}$$

（3）速度 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 之间的周向距离

$$\frac{\Delta S}{r}=\frac{1}{r}\int_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2}u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{u}}\mathrm{d}\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{\beta r}}\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\cos\Theta}{Z}\mathrm{d}\bar{u} \tag{3-2-18}$$

对于地球及小倾角

$$\frac{\Delta S}{r}\approx\frac{1}{30}\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{Z} \tag{3-2-19}$$

（4）动压、密度和高度

动压 $$q=\frac{1}{2}\rho v^2=\frac{mg}{C_DS}\sqrt{\beta r}\frac{\bar{u}Z}{\cos^2\Theta} \tag{3-2-20}$$

对于地球及小倾角

$$q=30\bar{u}Z\left(\frac{mg}{C_DS}\right) \tag{3-2-21}$$

密度 $$\rho/\rho_0=\mathrm{e}^{-\beta h}=\frac{2}{\rho_0}\sqrt{\frac{\beta}{r}}\left(\frac{m}{C_DS}\right)\frac{Z}{\bar{u}} \tag{3-2-22}$$

高度 $$h=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho_0}{2}\frac{\bar{u}}{\sqrt{\beta/r}\frac{mZ}{C_DS}}\right) \tag{3-2-23}$$

（5）飞行时间

$$t=\int\frac{\mathrm{d}S}{u}=\frac{1}{\sqrt{\beta g}}\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\cos\Theta}{\bar{u}Z}\mathrm{d}\bar{u} \tag{3-2-24}$$

对于地球及小倾角

$$t=27.0\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\bar{u}Z} \tag{3-2-25}$$

（6）驻点热流及总吸热量

$$q_s=\frac{k_s}{\sqrt{r}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left(\frac{\bar{u}}{\cos\Theta}\right)^m$$

将 ρ 的关系代入上式，对 $n=1/2$，$m=3$ 可得对流层流

$$q_s=k_s'\bar{u}^{5/2}Z^{1/2}\frac{1}{\cos^3\Theta} \tag{3-2-26}$$

令

$$\bar{q}_s=\frac{q_s}{k_s'}=\bar{u}^{5/2}Z^{1/2}\frac{1}{\cos^3\Theta}$$

k'_s 是不包含 $\bar{u}$、Z、Θ，由结构参数、外形等决定的常数。

总吸热量 $$Q = Q_s\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{\bar{u}^{3/2}}{Z^{1/2}\cos^2\Theta}\mathrm{d}\bar{u} \qquad (3\text{-}2\text{-}27)$$

令 $$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_s} = \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{\bar{u}^{3/2}}{Z^{1/2}\cos^2\Theta}\mathrm{d}\bar{u} \qquad (3\text{-}2\text{-}28)$$

Q_s 是不含 $\bar{u}$、Z、Θ，由结构参数、外形等决定的常数。

可见如果已知 Z（$\bar{u}$）的关系，当再入初始条件和飞行器参数 C_DS/m 及升阻比 L/D 给定时，可以求出再入弹道上的特性参数。

可惜的是式（3-2-14）并不能求出解析解，即使令升阻比 $L/D=0$，式（3-2-14）简化成

$$\bar{u}Z'' - (Z' - \frac{Z}{\bar{u}}) = \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta \qquad (3\text{-}2\text{-}29)$$

仍得不到解析解。

如果是弹道再入，重力和曲率影响不考虑，$\Theta=\Theta_e=$常数，则式（3-2-29）变成

$$\bar{u}Z'' = Z' - \frac{Z}{\bar{u}} = \sqrt{\beta r}\sin\Theta \qquad (3\text{-}2\text{-}30)$$

积分式（3-2-30）得：

$$Z' = \sqrt{\beta r}\sin\Theta\ln\bar{u} + C \qquad (3\text{-}2\text{-}31)$$

比较式（3-2-30）和式（3-2-31）可以得

$$\frac{Z}{\bar{u}} = Z' - \sqrt{\beta r}\sin\Theta$$

$$= \sqrt{\beta r}\sin\Theta\ln\bar{u} - \sqrt{\beta r}\sin\Theta + C$$

当 $\bar{u}=\bar{u}_e$ 时 $Z=0$，得

$$C = \sqrt{\beta r}\sin\Theta - \sqrt{\beta r}\sin\Theta\ln\bar{u}_e$$

$$\frac{Z}{\bar{u}} = \sqrt{\beta r}\sin\Theta\ln\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}$$

即
$$\ln\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}=\frac{Z}{u\sqrt{\beta r}\sin\Theta}=\frac{C_D S\rho_0 e^{-\beta h}}{2m\beta\sin\Theta} \tag{3-2-32}$$

即
$$v=v_e\exp\left(\frac{C_D S\rho_0 e^{-\beta h}}{2m\beta\sin\Theta}\right) \tag{3-2-33}$$

式（3-2-33）就是式（3-1-8）的简化结果。

§3.2.2 升阻比 $L/D=0$ 时弹道特性分析

$L/D=0$ 时的弹道方程如式（3-2-29）

$$\bar{u}Z''-\left(Z'-\frac{Z}{\bar{u}}\right)=\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta \tag{3-2-34}$$

它是一个二阶非齐次微分方程，要给出两个初始条件：设 $\bar{u}=\bar{u}_e$ 时 $Z(\bar{u}_e)=Z_e$，$Z'(\bar{u}_e)=Z'_e$，如果从圆轨道卫星以小角度$|\Theta_e|$再入，则 $\bar{u}_e=1$ 时 $Z(1)=0$，而 $Z'(1)=\sqrt{\beta r}\sin\Theta_e+\frac{Z(1)}{\bar{u}_e}\approx 30\sin\Theta_e$，因$|\Theta_e|$较小，$Z'(1)\approx 0$.

通过数值积分可以得到 $L/D=0$ 时，不同初始再入角 Θ_e 时 $Z(\bar{u})$ 的关系。文献 [8]、[13] 给出了不同的小再入角（Θ_e 由 0°～−4°）时，$\bar{u}$ 由 0.995～0.025 时与 Z、水平加速度 $30\bar{u}Z$、周向距离相对值 $\Delta S/r$、飞行时间 t、当地速度倾角 Θ 及总吸热量的相对值 $\bar{Q}$ 的关系。图 3-4 画出了不同的再入角 Θ_e 时，过载与 $\bar{u}$ 的变化曲线。

从图 3-4 可以看出，若 $L/D=0$，在某一再入角时，随着速度的减小，过载增加，到某一高度达到最大，而后随着速度的减小过载也减小。对每一个再入角 Θ_e，存在着一个过载最大值。同理对驻点热流也存在着最大值。

图 3-5 画出了最大过载值 n_{max}、总的飞行时间 t_f、总吸热量的相对值 $\bar{Q}$、周向距离相对值 $\Delta S/r$ 和落地倾角 Θ_f 与再入角 Θ_e 的关系。

从图 3-5 可以看出：

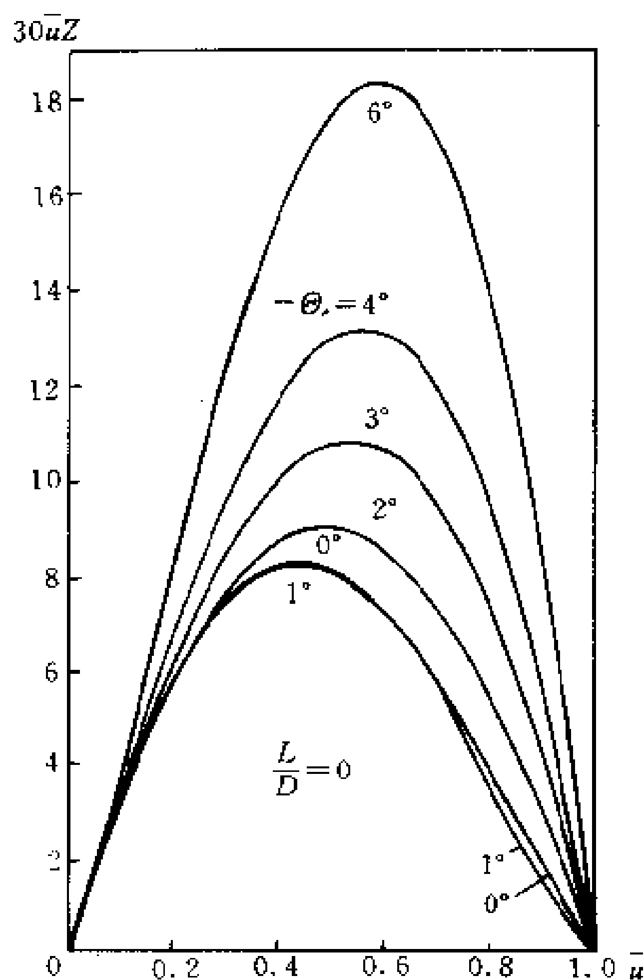


图 3-4 水平过载与 $\bar{u}$ 的关系

①随$|\Theta_e|$增加，其最大过载增加，出现该值的速度虽有变化，但不大。

②随$|\Theta_e|$增加、总吸热量是减小的。

③随$|\Theta_e|$增加、总飞行时间是减小的。

④随$|\Theta_e|$增加、其周向距离是减小的。

⑤随$|\Theta_e|$增加，倾角Θ的变化过程不同，但落地的Θ_f基本一样。

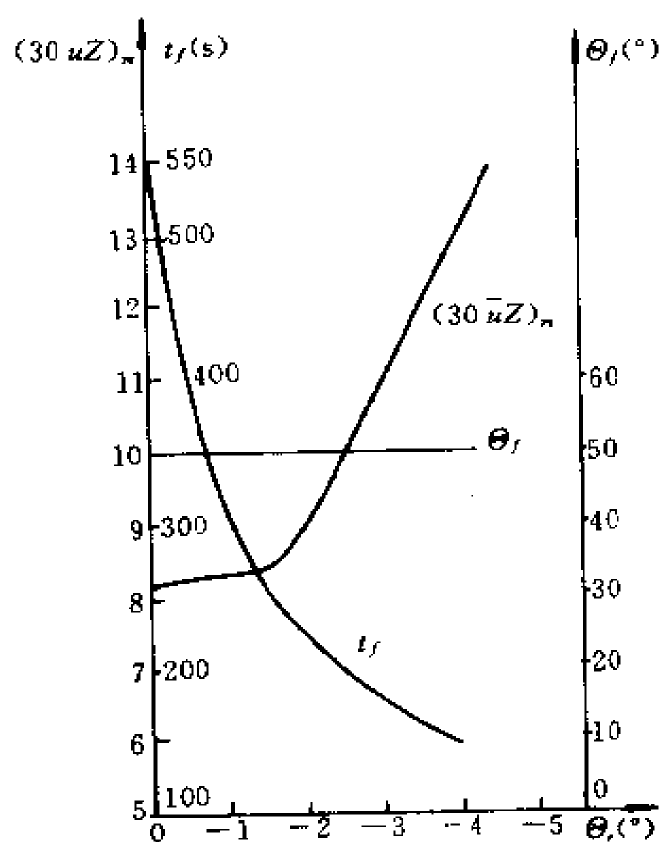


图 3-5 (a)　n_{max}、Θ_f、t_f 与 Θ_c 的关系

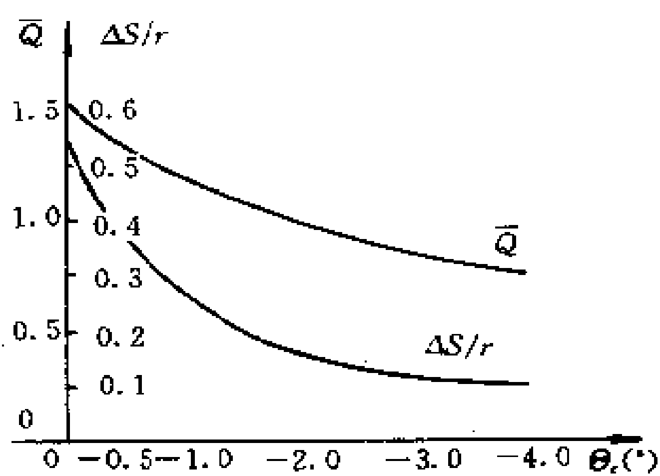


图 3-5 (b)　$\bar{Q}$、$\Delta S/r$ 与 Θ_c 的关系

§3.2.3 升阻比 L/D 等于常数时弹道特性分析

当升阻比 $L/D\neq 0$ 时，轨道方程如式（3-2-14）

$$\bar{u}Z''-(Z'-\frac{Z}{\bar{u}})=\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta-\sqrt{\beta r}\frac{L}{D}\cos^3\Theta \tag{3-2-35}$$

注意到假设②，$L/D\text{tg}\Theta\ll 1$，为了满足假设条件，Θ 要求很小，否则计算误差大。当 $|\Theta|$ 较小时，为了简化，设 $\cos\Theta\approx 1$，则式（3-2-35）简化成：

$$\bar{u}Z''-(Z'-\frac{Z}{\bar{u}})=\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}-\sqrt{\beta r}\frac{L}{D} \tag{3-2-36}$$

一般地说，L/D 应该是 M 数、攻角 α 和高度 h 的函数，通过数值积分虽可得到数值解，但因升阻比 L/D 不是确定值，不便于分析升阻比 L/D 对特征参数的影响。为便于分析，在再入弹道所要研究的弹道段，可认为攻角一定，升阻比 L/D 为常数，即略去马赫数 M 和高度 h 对升阻比 L/D 的影响，这在 M 数较大时是允许的。这样就可以分析不同常升阻比时，不同的再入角 Θ_e 对弹道特性的影响。

下面分析升阻比 L/D 对弹道上最大水平加速度和驻点热流相对值的影响。

取不同的升阻比 L/D，令 $\Theta_e=0°$，$\bar{u}_e=1$ 计算弹道方程可得水平加速度、驻点热流与 $\bar{u}$ 的关系图如图 3-6 和图 3-7 所示。

从图 3-6 和图 3-7 看出，随着升阻比 L/D 的加大，水平加速度分量减小，且升阻比 L/D 为负值时，水平加速度急剧增加。

同样，随着升阻比加大，驻点热流是减小的，而升阻比为负值时，驻点热流增加很多。

当初始再入角 Θ_e 不等于零，升阻比也不等于零时，最大驻点热流相对值 $\bar{q}_{max}$、总吸热量相对值 $\bar{Q}$ 及水平过载最大值（$30\bar{u}Z$）与

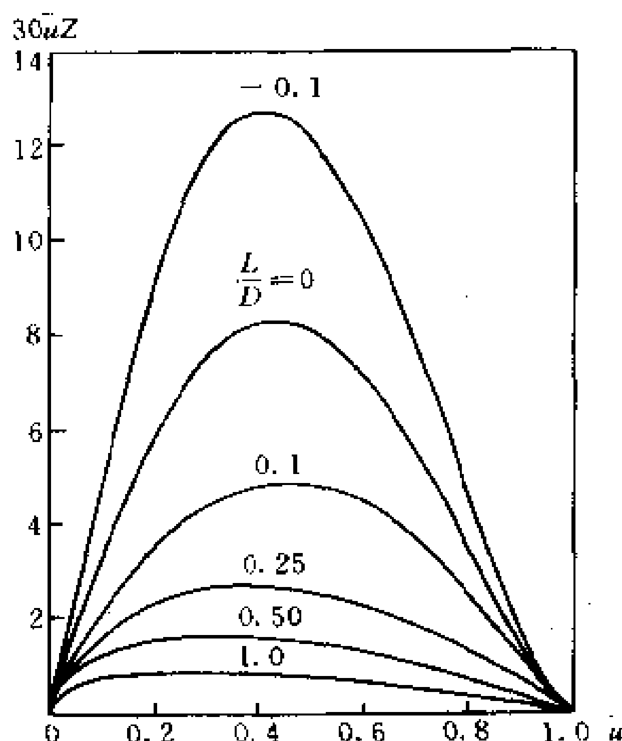


图 3-6 升阻比 L/D 对水平加速度的影响

再入角 Θ_e 及升阻比的关系如图 3-8、图 3-9、图 3-10 所示。从图 3-8、图 3-9.和图 3-10 看出：在同样再入角 Θ_e 情况下，随着升阻比 L/D 加大，水平加速度最大值、驻点热流最大值减小，但总吸热量是增加的，这是因为总的飞行时间长了，总吸热量要增加。而在升阻比一定的情况下，随着再入角 $|\Theta_e|$ 的增加，水平加速度最大值、驻点热流最大值也增加，但总吸热量是减小的，这是热流量增加了，但总飞行时间短了，所以总吸热量要减小。

这里要说明一点，上述曲线均是利用查普曼方程得到的结果，因此它只适用于满足了查普曼方程两个假设条件下的再入弹道段，特别是 $L/D\mathrm{tg}\Theta \ll 1$ 的假设，对再入弹道末端，上述曲线不完全正确。但对最大加速度、最大驻点热流的计算是满足查普曼方

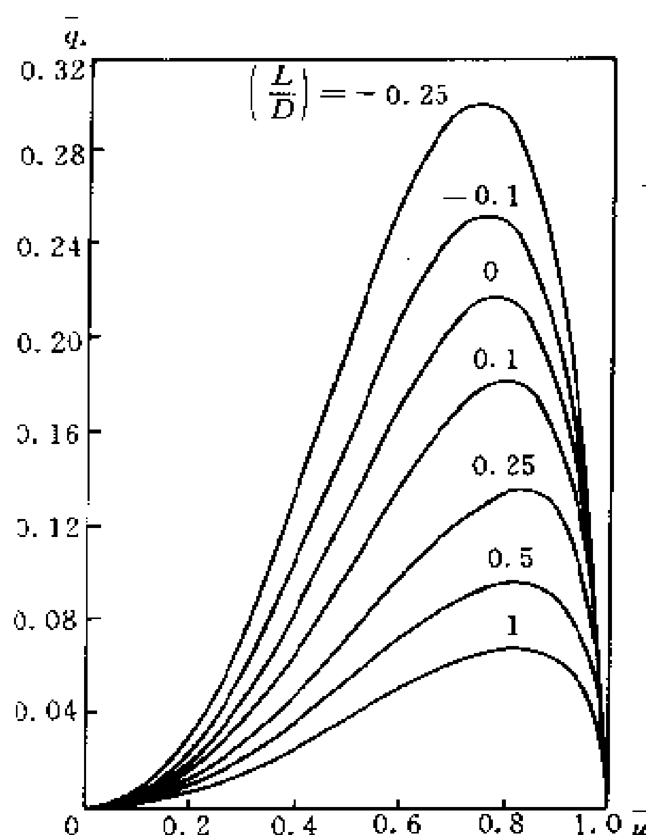


图 3-7 升阻比对驻点热流的影响

程的假设条件。如果不用查普曼方程，而用平面质心运动方程式(3-2-4)进行弹道计算，再入角 Θ_e 和升阻比 L/D 对加速度最大值、驻点热流最大值及总吸热量的影响除了数值的大小上有些误差外，变化规律应该同上述分析是一样的。

§3.3 升阻比为常数时运动方程的近似解

前面讨论了卫星和飞船的再入运动方程近似解，它相当于小升阻比和小再入角 Θ_e 的情况。如果升阻比较大，再入倾角也较大，可以用罗赫（Loh）[9]提出的近似解。

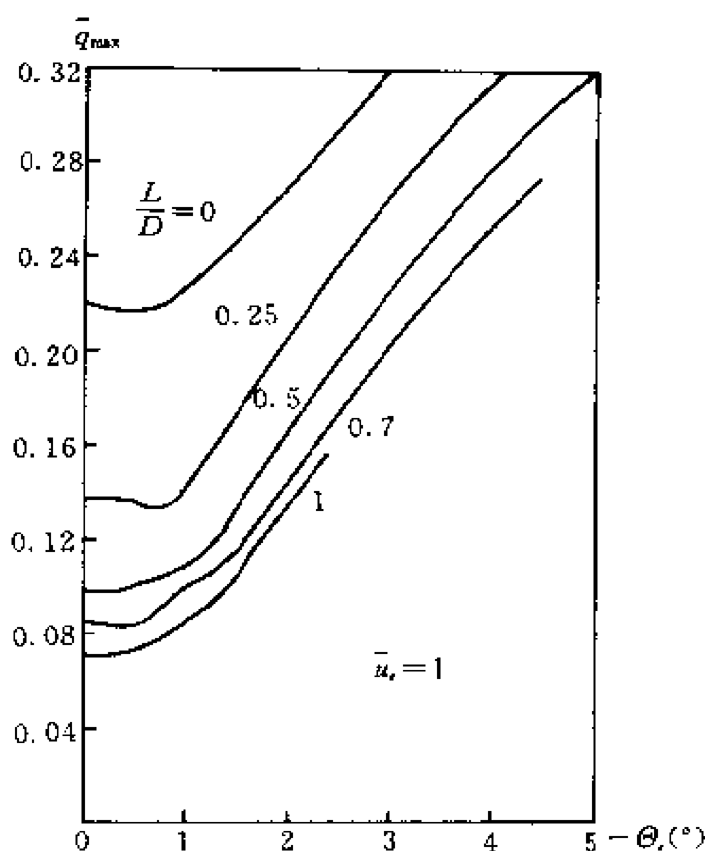


图 3-8 不同升阻比时最大驻点热流相对值 $\bar{q}_{max}$ 与 Θ_e 的关系

罗赫在 1963 年出版了《Dynamics and thermodynamics of planetary entry》一书，以后又陆续地发表了一些文章，他对其他作者的解进行比较后得到了所谓的一阶近似解、二阶近似解和高阶近似解。其高阶近似解、二阶近似解虽是解析解，但求解公式繁，在计算机已很普及的情况下，这种解并不很适用，更多的是用一阶近似解。本节介绍其求高阶近似解、二阶近似解的思路，重点讨论一阶近似解。

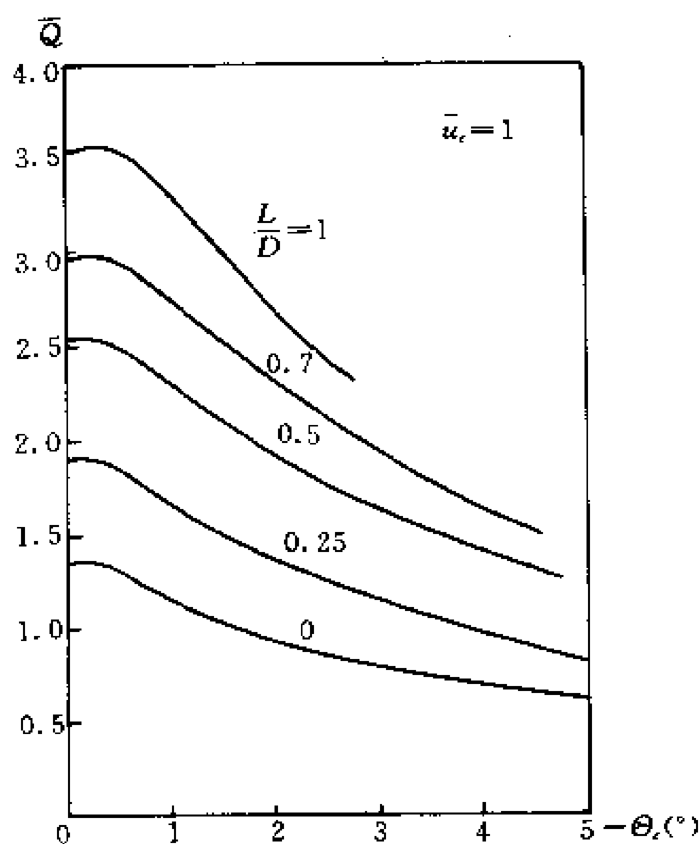


图 3-9　不同升阻比时总吸热量相对值 $\bar{Q}$ 与 Θ_c 的关系

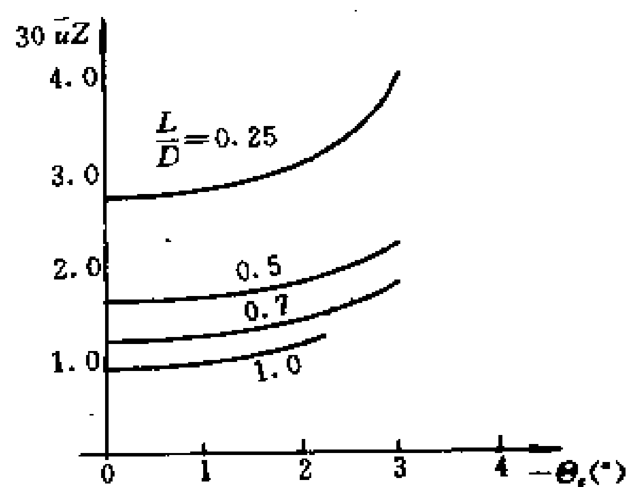


图 3-10　不同升阻比时水平加速度最大值 $30\bar{u}Z$ 与 Θ_c 的关系

§3.3.1 升阻比为常数时运动方程的近似解

1. 基本方程

由式（3-1-1）可得再入段运动方程如下：

$$\left.\begin{aligned} & mv\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}+mg\cos\Theta\left(1-\frac{v^2}{gr}\right)=\frac{C_y\rho v^2S}{2} \\ & m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{C_x\rho v^2S}{2}=-mg\sin\Theta \\ & \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=v\sin\Theta \end{aligned}\right\} \tag{3-3-1}$$

仍假设大气密度变化为指数规律，$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\beta h}$，消去时间变量 t，以 ρ 为自变量，式（3-3-1）可写成罗赫采用的基本方程[9]：

$$\frac{\mathrm{d}\cos\Theta}{\mathrm{d}\rho}+\frac{1}{\beta R_0}\frac{\cos\Theta}{\rho}\left(\frac{gR_0}{v^2}-1\right)=\frac{1}{2}\frac{L}{D}\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right) \tag{3-3-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}(v^2/gR_0)}{\mathrm{d}\rho}-\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)\left(\frac{v^2/gR_0}{\sin\Theta}\right)=\frac{1}{\beta R_0}\frac{1}{\rho} \tag{3-3-3}$$

式（3-3-2）中左边第一项对应于 $v\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t$，它表示外力引起当地速度倾角 Θ 的变化，而式（3-3-2）中左边的第二项表示重力和离心力引起的 Θ 的变化，很明显，这两个力的作用是相反的，即由地球曲率引起的所谓离心力要抵消一部分重力对弹道弯曲的影响，当速度 v 接近 $\sqrt{gR_0}$ 时，这两个作用抵消。式（3-3-2）右边的项表示升力的作用，当零攻角时，该项为零。式（3-3-3）左边第一项相应于外力引起的切向加速度，而第二项对应于阻力引起 v 的变化，式（3-3-3）右边的项表示重力分量引起 v 的变化。

升力、阻力和重力虽然对 $v\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 有影响，但其数量级在不同情况下是不一样的，这点在求近似解中特别重要。

2. 再入运动方程的近似解

对方程式（3-3-2）和式（3-3-3）直接积分得不到解析解，但罗赫提出方程式（3-3-2）中的

$$(\frac{1}{\beta R_0})\frac{\cos\Theta}{\rho}(\frac{gR_0}{v^2}-1)$$

对 ρ 和 Θ 的积分是不敏感的，因而可以把它当作常数移到积分符号之外，这样方程（3-3-2）便积出来了。但罗赫强调只是认为 $(1/\beta R_0)(\cos\Theta/\rho)(gR_0/v^2-1)$ 在积分过程中是常数，并不是 v、ρ、Θ 不变化，事实上这一项也是变化的，只是这样假设，便于积分，而且带来的误差不大。因为 (L/D) 为常数，而 $C_DS/m\beta$ 也可以认为是常数，则

$$\frac{1}{2}(\frac{L}{D})(\frac{C_DS}{m\beta})-\frac{1}{\beta R_0}(\frac{\cos\Theta}{\rho})(\frac{gR_0}{v^2}-1)=\text{æ}$$

也为常数。式（3-3-2）变成

$$\frac{\mathrm{d}\cos\Theta}{\mathrm{d}\rho}=\text{æ} \tag{3-3-4}$$

积分上式，且将 æ 表达式代入，可得：

$$\cos\Theta=\cos\Theta_e+[\frac{1}{2}(\frac{L}{D})(\frac{C_DS}{m\beta})-(\frac{1}{\beta R_0})\frac{\cos\Theta}{\rho}(\frac{gR_0}{v^2}-1)(\rho-\rho_e)] \tag{3-3-5}$$

即

$$\cos\Theta=\frac{\cos\Theta_e+\frac{1}{2}(\frac{L}{D})(\frac{C_DS}{m\beta})\rho(1-\rho_e/\rho)}{1+\frac{1}{\beta R_0}(\frac{gR_0}{v^2}-1)(1-\rho_e/\rho)} \tag{3-3-6}$$

其中 ρ_e、Θ_e、v_e 是再入大气层时再入点的大气密度、再入倾角和再入速度。

式（3-3-4）可写成 $-\sin\Theta\mathrm{d}\Theta=\text{æ}\mathrm{d}\rho$，将其代入式（3-3-3）得：

$$\frac{\mathrm{d}(v^2/gR_0)}{\mathrm{d}\Theta}+(\frac{C_DS}{m\beta})\frac{v^2/gR_0}{\text{æ}}=(\frac{2}{\beta R_0})\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta_e-\cos\Theta} \tag{3-3-7}$$

式（3-3-7）为一阶变系数微分方程，罗赫将其展开得到所谓的高阶近似解，但其解析式很繁，这里不讨论，可参考文献［9］。

罗赫的二阶近似解是认为再入起始高度 h_e 很大，$\rho_e \to 0$，而且不考虑重力切向分量对速度大小的影响，则式（3-3-6）变成

$$\cos\Theta = \frac{\cos\Theta_e + \frac{1}{2}(\frac{L}{D})(\frac{C_D S}{m\beta})\rho}{1 + \frac{1}{\beta R_0}(\frac{gR_0}{v^2} - 1)} \tag{3-3-8}$$

式（3-3-7）变成

$$\frac{d(v^2/gR_0)}{d\Theta} = -\frac{C_D S}{m\beta}\frac{v^2/gR_0}{æ} \tag{3-3-9}$$

积分上式得：

$$\ln(\frac{v^2/gR_0}{v_e^2/gR_0}) = -\frac{C_D S}{m\beta}(\frac{\Theta - \Theta_e}{æ}) \tag{3-3-10}$$

将 æ 代入式（3-3-10）可得：

$$\ln(\frac{v^2/gR_0}{v_e^2/gR_0}) = \frac{-\frac{C_D S}{m\beta}(\Theta - \Theta_e)}{[\frac{1}{2}\frac{L}{D}(\frac{C_D S}{m\beta}) - \frac{1}{\beta R_0}\frac{\cos\Theta}{\rho}(\frac{gR_0}{v^2} - 1)]} \tag{3-3-11}$$

式（3-3-8）和式（3-3-11）有三个未知量 Θ、v、ρ，当以 ρ 为自变量，即以高度为自变量，则利用式（3-3-8）和式（3-3-11）联立，可以求出 v 和 Θ.

式（3-3-8）和式（3-3-11）便是罗赫的二阶近似解。文献[9]经过与数值计算的精确解进行比较，说明二阶近似解在各种情况下，即大小倾角、大小升阻比都比较适用，只要 $\beta R_0 > 50$ 和不要求特别精确就行。而且罗赫把二阶近似解推广应用到有振荡的再入弹道。

二阶近似解虽适用范围广，但式（3-3-8）和式（3-3-11）联立求解 Θ、v 要解超越方程，并不方便，不如在一定的应用范围用一阶近似解更方便一些。

§3.3.2 再入运动方程的一阶近似解

1. 运动方程的一阶近似解

所谓一阶近似解就是不仅忽略重力对切向加速度的影响，还忽略重力法向分量 $mg\cos\Theta$ 和所谓离心力对速度倾角变化的影响。也可以这样说，罗赫的二阶近似解认为 $(1/\beta R_0)(\cos\Theta/\rho)\cdot(gR_0/v^2-1)$ 在积分过程中为一常数，而一阶近似解则认为该项为零。其理由是在再入过程中初始阶段 v 较大，$gR_0/v^2\approx 1$，故 $gR_0/v^2-1\approx 0$，所以该项对 æ 值的影响小；再入过程中，v 减小，(gR_0/v^2-1) 的数值较初始段大一些，但此时密度随高度下降而增加，故该项 $(1/\beta R_0)(\cos\Theta/\rho)(gR_0/v^2-1)$ 也不大，可以不像二阶近似解那样认为它等于常数，而是认为等于零。更直接地说是不考虑重力和离心力对再入弹道的影响。

此外本书讨论一阶近似解的目的，除了上述原因外，还在于并不是用一阶近似解去计算弹道，而是用在弹道优化设计中，此时重力的作用是一系统的因素，在某一弹道集合中，相对地讲是可以略去的。此时的弹道方程为：

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{X}{m}=-\frac{D}{m} \tag{3-3-12}$$

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{Y}{mv}=\frac{L}{mv} \tag{3-3-13}$$

两式相除

$$\frac{dv}{v}=-\frac{d\Theta}{L/D}$$

故

$$v=v_e e^{[-(\Theta-\Theta_e)/(L/D)]} \tag{3-3-14}$$

忽略重力和离心力式（3-3-8）变成

$$\cos\Theta=\cos\Theta_e+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{D}\right)\frac{C_D S}{m\beta}(\rho-\rho_e) \tag{3-3-15}$$

下面推导求射程的公式。

已知

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{v\cos\Theta}{r} \tag{3-3-16}$$

与式（3-3-13）相除得：

$$\frac{dS}{d\Theta} = \frac{R}{r}\frac{mv^2}{L}\cos\Theta \tag{3-3-17}$$

由于再入段高度与地球半径相比是小量，可认为$R\approx r$，则式（3-3-17）改写成

$$dS = \frac{\cos\Theta d\Theta}{\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m}\rho}$$

由式（3-3-15）解出ρ，并代入上式得：

$$dS = \frac{\cos\Theta d\Theta}{\beta\left(\cos\Theta + \frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}\rho_e - \cos\Theta_e\right)}$$

$$= \frac{\cos\Theta d\Theta}{\beta(b + \cos\Theta)} \tag{3-3-18}$$

其中$b = \frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}\rho_e - \cos\Theta_e$，式（3-3-18）可改写成

$$dS = \frac{d\Theta}{\beta} - \frac{b d\Theta}{\beta(\cos\Theta + b)}$$

积分上式得：

$$S = \frac{1}{\beta}(\Theta - \Theta_e) - \frac{2b}{\beta\sqrt{b^2 - 1}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\operatorname{tg}\frac{\Theta_e}{2}\right)\right] \quad (b^2 > 1) \tag{3-3-19}$$

$$S = \frac{1}{\beta}(\Theta - \Theta_e) - \frac{b}{\beta\sqrt{1 - b^2}}\ln\left(\frac{1 + b\cos\Theta + \sqrt{1 - b^2}\sin\Theta}{1 + b\cos\Theta + \sqrt{1 - b^2}\sin\Theta_e} \cdot \frac{b + \cos\Theta_e}{b + \cos\Theta}\right) \quad (b^2 < 1) \tag{3-3-20}$$

2. 升阻比等于常数时加速度最大值

用一阶近似解可以较方便地估算出特征参数，如最大的加速度、最大热流等。一般出现最大加速度处的 M 数较大，可认为 C_D、C_L 为常数，故当切向加速度最大时，法向加速度也达到最大。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{C_D S}{m}\frac{\rho v^2}{2}$$

将式（3-3-14）和式（3-3-15）中的密度 ρ 代入上式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{C_D S}{2m}\left(\frac{\cos\Theta-\cos\Theta_e}{\frac{1}{2}\left(\frac{L}{D}\right)\frac{C_D S}{m\beta}}+\rho_e\right)v_e^2 \mathrm{e}^{-2\frac{\Theta-\Theta_e}{L/D}} \quad (3\text{-}3\text{-}21)$$

可见 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 是 Θ 角的函数，可能存在极值。

将 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 对 Θ 微分得

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}\Theta}=\frac{D}{L}\beta\left[\left(\cos\Theta-\cos\Theta_e+\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}\rho_e\right)2\frac{D}{L}+\sin\Theta\right]\cdot$$
$$\cdot v\mathrm{e}^{-2\frac{D}{L}(\Theta-\Theta_e)} \quad (3\text{-}3\text{-}22)$$

令式（3-3-22）等于零，从中解出满足极值条件的速度倾角 Θ_m

$$\frac{2}{L/D}\left(\cos\Theta_m-\cos\Theta_e+\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}\rho_e\right)=-\sin\Theta_m$$

将上式两边平方，且令

$$\left.\begin{aligned}a&=2D/L\\ b&=\rho_e\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}-\cos\Theta_e\\ c&=a^2b^2-1\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}3\text{-}23)$$

则可以整理得：

$$(a^2+1)\cos^2\Theta_m+2ba^2\cos\Theta_m+C=0$$

由此可以解得：

$$\cos\Theta_m=\frac{-ba^2\pm\sqrt{1+a^2(1-b^2)}}{a^2+1} \quad (3\text{-}3\text{-}24)$$

因 a、b、c 的值仅与结构参数 m、C_D、升阻比 L/D 和再入倾角 Θ_e 有关，而与 v_e 的大小无关，故 Θ_m 与 v_e 无关。

将求出的 Θ_m 代入式（3-3-14）和式（3-3-15）可得出现切向加速度最大时的 v_m 和 h_m

$$v_m = v_e e^{[-(\Theta_m-\Theta_e)/(L/D)]} \qquad (3\text{-}3\text{-}25)$$

$$h_m = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{\rho_0}\left(\rho_e + \frac{\cos\Theta_m - \cos\Theta_e}{\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}}\right)\right] \qquad (3\text{-}3\text{-}26)$$

可见 v_m/v_e、h_m 的值同样与 v_e 无关，仅与结构参数、升阻比、再入角 Θ_e 有关。将 Θ_m 代入式（3-3-21）可得：

$$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} = v_e^2\frac{C_D S}{2m}\rho_m e^{-[\frac{\Theta_m-\Theta_e}{L/D}]} \qquad (3\text{-}3\text{-}27)$$

从式（3-3-27）看出：$|\dot{v}|_{\max}$ 的大小除了与结构参数、升阻比、再入角 Θ_e 有关外，还与 v_e 平方成正比。下面计算一个例子，其结果如示意图 3-11。从图 3-11 看出为了减小 $|\dot{v}|_{\max}$，可以通过提高升阻比和减小再入角 Θ_e 来满足要求。

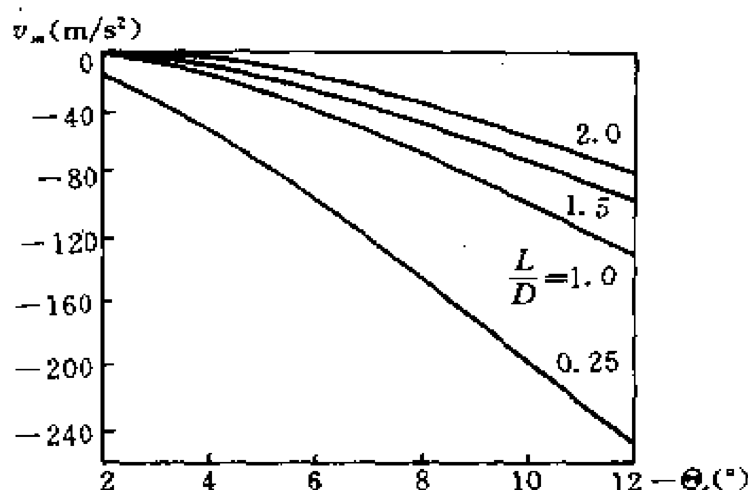


图 3-11　不同升阻比时最大加速度与 Θ_e 的关系图

3. 升阻比为常数时最大热流的计算

用一阶近似解也可以求出最大热流值。高空大气密度小，雷诺数 R_e 较小，气流可视为层流。飞行器驻点热流可以近似表示为

$$q = 3.08 \times 10^{-4}(\rho g)^{1/2}v^{3.08} \tag{3-3-28}$$

其中已设再入飞行器头部表面的曲率半径为 1m，ρg 的单位为 kg/m^3，v 的单位为 m/s，热流的单位为 W/cm^2。将式（3-3-14）和式（3-3-15）代入上式，且 $\rho_e \approx 0$，则可以得：

$$q = 3.08 \times 10^{-4}\left(g\frac{\beta m}{C_D S}\frac{1}{2}\frac{D}{L}\right)^{1/2} \cdot (\cos\Theta - \cos\Theta_e)^{1/2} v_e^{3.08} \cdot$$
$$\cdot \exp\left[\frac{-3.08(\Theta - \Theta_e)}{L/D}\right] \tag{3-3-29}$$

为了求 q 的极大值令 $dq/d\Theta = 0$，可以得 q 取极值时 Θ_m 应满足的条件

$$\cos\Theta_m - \cos\Theta_e = \frac{1}{2}\frac{L/D}{3.08}\sin\Theta_m \tag{3-3-30}$$

或者解得：

$$\sin\Theta_m = \frac{-\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{1}{3.08}\cos\Theta_e + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{1}{3.08}\right)^2 + \sin^2\Theta_e}}{1 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3.08}L/D\right)^2} \tag{3-3-31}$$

由式（3-3-30）知

$$-\frac{1}{2}\frac{L/D}{3.08}\sin\Theta_m = \frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}(\rho_m - \rho_e)$$
$$\approx \frac{1}{2}\frac{L}{D}\frac{C_D S}{m\beta}\rho_m$$

故

$$\rho_m = -\frac{1}{3.08}\frac{\beta m}{C_D S}\sin\Theta_m \tag{3-3-32}$$

$$v_m = v_e \exp\left[-\frac{(\Theta_m - \Theta_e)}{L/D}\right] \tag{3-3-33}$$

将 Θ_m 代入到式（3-3-29）可以得

$$q_m = 3.08 \times 10^{-4} \sqrt{g \frac{\beta m}{C_D S} \frac{1}{2} \frac{D}{L}} (\cos\Theta_m - \cos\Theta_e)^{1/2} \cdot \left\{v_e \exp\left[\frac{-(\Theta_m - \Theta_e)}{L/D}\right]\right\}^{3.08} \tag{3-3-35}$$

从式（3-3-31）和式（3-3-32）看出，最大热流处的 Θ_m、ρ_m 与再入速度 v_e 无关，而 v_m 与 v_e 成正比。由式（3-3-35）可以看出最大热流值与升阻比 L/D 和 Θ_e 的关系，图 3-12 表示不同升阻比 L/D时 q_m 与 Θ_e 的关系示意图。

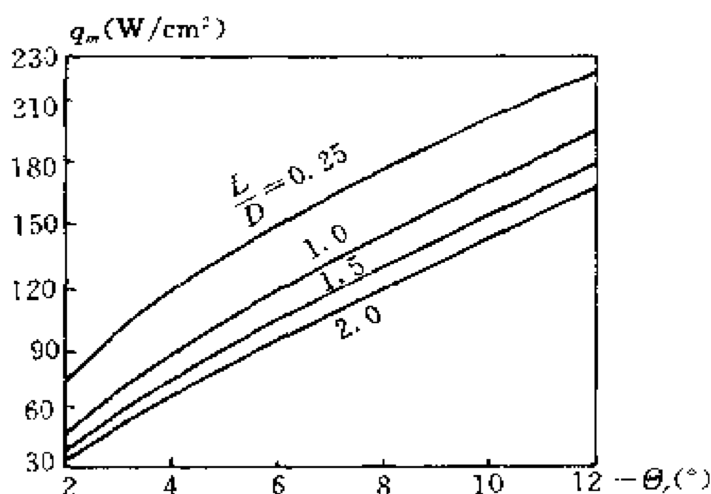


图 3-12　不同升阻比 L/D 时最大热流与 Θ_e 的关系图

从图 3-12 看出，当升阻比 L/D 一定时，最大热流 q_m 随 $|\Theta_e|$ 的增加接近线性增加，而当 $|\Theta_e|$ 一定时，随着升阻比的增加，最大热流值减小，从最大热流 q_m 的限制来看，增加升阻比对 Θ_e、v_e 的限制可以放宽。

§3.4 升阻比为变数时运动方程的近似解

前面的讨论都是以再入过程中升阻比为常数进行分析的。升阻比为常数要依靠飞行器上的姿态控制系统来保证。从弹道设计的观点，不一定要保证飞行过程中升阻比为常数，用变升阻比保证再入飞行满足一定要求，例如过载要求、热流要求也是有意义的。

文献［9］对变升阻比的飞行提供了几个方案：

①常加速度飞行；

②常空气动力过载飞行；

③常驻点热流或常平均热流飞行；

④常下降率飞行；

⑤常倾斜角飞行。

下面介绍 ρv^n 为常数的飞行，其中 n 为常数，n 取不同值对应于上述的一些情况。由切向加速度 $\dot{v}=-C_DS\rho v^2/2m$、空气阻力 $D=C_D\rho v^2S/2$ 以及升力 $L=C_L\rho v^2S/2$，可看出 $n=2$ 近似地描述等切向加速度和等空气动力过载飞行。由 $q_{av}=C_f'\rho v^3/4$ 知 $n=3$ 对应于常平均热流飞行。而由 $q_s=k_s\sqrt{\rho}v^3$ 知 $n=6$ 对应于常驻点热流飞行。记

$$\rho v^n = \rho_e v_e^n = k_1 \tag{3-4-1}$$

下面以 n 为常数进行求解运动方程。

（1） 速度 v

微分（3-4-1）可得：

$$\mathrm{d}\rho = \left(-\frac{n}{2}\right)k_1\frac{\mathrm{d}v^2}{v^{n+2}} \tag{3-4-2}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{C_DS}{2m}\rho v^2$$

知

$$\mathrm{d}v^2 = \frac{C_DS}{m\beta}\frac{v^2}{\sin\Theta}\mathrm{d}\rho \tag{3-4-3}$$

即
$$dv^2 = \left(\frac{C_D S}{m\beta}\right)\left(\frac{v^2}{\sin\Theta}\right)\left(-\frac{n}{2}\right)k_1 \frac{dv^2}{v^{n+2}}$$

故
$$v^n = -\left(\frac{C_D S}{m\beta}\right)\left(\frac{k_1}{\sin\Theta}\right)\left(\frac{n}{2}\right) \tag{3-4-4}$$

（2）高度 h

由 $\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$ 可得：

$$h = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho_0 v^n}{k_1}\right) \tag{3-4-5}$$

（3）当地速度倾角 Θ

由式（3-4-4）知

$$\sin\Theta = -\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{C_D S}{m\beta}\right)\left(\frac{k_1}{v^n}\right) = -\frac{n}{2}\left(\frac{C_D S}{m\beta}\right)\rho \tag{3-4-6}$$

（4）加速度 $\dot{v}$

当不考虑重力时

$$\dot{v} = -\frac{1}{2m}C_D S\rho v^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_D S}{m}\right)k_1 v^{2-n} \tag{3-4-7}$$

由式（3-4-7）看出，当不考虑重力影响，沿 $\rho v^n = k_1$ 飞行时，最大切向加速度不存在

当 $n>2$ 时，随 v 的减小，$|\dot{v}|$ 增加。

当 $n<2$ 时，随 v 的减小，$|\dot{v}|$ 减小。

当 $n=2$ 时，随 v 的减小，$|\dot{v}|$ 不变化。

（5）沿轨道飞行的距离 S_1

由 $\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$ 可得

$$d\rho = -\beta\rho dh = -\beta\rho\sin\Theta dS_1 \tag{3-4-8}$$

代式（3-4-8）入式（3-4-3）可得

$$dS_1 = \frac{-dv^2}{\left(\frac{C_D S}{m}\right)k_1 v^{2-n}}$$

积分得
$$S_1 - S_{1e} = \frac{(2/n)}{\left(\frac{C_D S}{m}\right)k_1}(v_e^2 - v^2) \tag{3-4-9}$$

（6）射程 S

$$\mathrm{d}S=\cos\Theta\mathrm{d}S_1=\sqrt{1-\sin^2\Theta}\mathrm{d}S_1$$

故
$$\mathrm{d}S=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\Theta}}{(\frac{C_DS}{m})k_1v^{2-n}}\mathrm{d}v^2$$

代式（3-4-6）入上式得：

$$\mathrm{d}S=-\frac{\{v^{2n}-[(\frac{C_DS}{m\beta})k_1(\frac{n}{2})]^2\}^{1/2}}{\frac{C_DS}{m}k_1v^2}\mathrm{d}v^2$$

令
$$a=[(\frac{C_DS}{m\beta})(\frac{n}{2})k_1]^2,b=(\frac{C_DS}{m})k_1,x=v^2$$

则
$$\mathrm{d}S=-\frac{(x^n-a)^{1/2}}{b}\mathrm{d}x \tag{3-4-10}$$

n 为一般值不易解出，可用数值解。当 $n=2$ 时

$$S=\frac{-1}{b\sqrt{a}}[\mathrm{arcsec}(x\sqrt{\frac{1}{a}})-\mathrm{arcsec}(x_e\sqrt{\frac{1}{a_e}})] \tag{3-4-11}$$

（7）飞行时间

$$t=\int\frac{\mathrm{d}S}{v}=-\int_{v_e}^{v}\frac{\mathrm{d}v^2}{(\frac{C_DS}{m})k_1v^{2-n}v}$$

$$=(\frac{2m}{C_DS})(\frac{1}{k_1})(\frac{1}{n-1})[v_e^{n-1}-v^{n-1}] \tag{3-4-12}$$

（8）沿 $\rho v^n=k_1$ 弹道飞行时所需的升阻比

由方程式（3-3-2）知

$$\frac{L}{D}=\frac{2}{\frac{C_DS}{m\beta}}[(\frac{1}{\beta R_0}\frac{\cos\Theta}{\rho}(\frac{gR_0}{v^2}-1)-\sin\Theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\rho}] \tag{3-4-13}$$

由式（3-4-3）知

$$\sin\Theta=(\frac{C_DS}{m\beta})(\frac{v}{2})\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}v} \tag{3-4-14}$$

代式（3-4-14）入式（3-4-13）可得：

$$\left(\frac{L}{D}\right)=\frac{2}{\frac{C_DS}{m\beta}}\left[-\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)\left(\frac{v}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}v}\right)+\frac{1}{\beta R_0}\frac{\cos\Theta}{\rho}\left(\frac{gR_0}{v^2}-1\right)\right] \tag{3-4-15}$$

微分式（3-4-6）可得：

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}v}=-\frac{n^2}{2}\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)\left(\frac{k_1}{v^{n+1}}\right)\frac{1}{\cos\Theta} \tag{3-4-16}$$

代式（3-4-16）入式（3-4-15）得：

$$\left(\frac{L}{D}\right)=\left(\frac{n^2}{2}\right)\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)\left(\frac{k_1}{v^n\sqrt{1-\sin^2\Theta}}\right)+\left(\frac{1}{\beta R_0}\right)\frac{2\sqrt{1-\sin^2\Theta}}{\rho\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)}\left(\frac{gR_0}{v^2}-1\right) \tag{3-4-17}$$

将式（3-4-6）代入上式得沿 $\rho v^n=k_1$ 飞行时所需升阻比

$$\left(\frac{L}{D}\right)=\left(\frac{n^2}{2}\right)\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)\frac{k_1}{\left\{v^{2n}-\left[\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)k_1\right]^2\right\}^{1/2}}+\left(\frac{1}{\beta R_0}\right)\frac{2\left\{v^{2n}-\left[\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)k_1\right]^2\right\}^{1/2}}{k_1\left(\frac{C_DS}{m\beta}\right)}\left(\frac{gR_0}{v^2}-1\right) \tag{3-4-18}$$

其他保证 Θ 等于常数，或者 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ 等于常数所需升阻比也可以求出[9]。

求出的是实现所希望的弹道（或者说标准弹道）的标准升阻比。制导的任务就是去控制实际的升阻比接近标准升阻比，如载人飞船、航天飞机再入段的制导就是如此。

第四章 再入飞行器的最佳弹道

再入飞行器(弹头、飞船、航天飞机)再入大气层除了满足一些限制,如攻角不能超过最大值 α_{max},法向过载 n_y 不允许超过最大值外,还可以对弹道设计提出某些性能指标最佳的要求。例如对再入机动弹头,希望机动后其落地速度最大,又如航天飞机、飞船再入大气层时,为了减小烧蚀的程度,减轻热负荷,往往要求输入到航天飞机、飞船总热量最少等。总之可以归纳为一个满足某一性能指标的最佳弹道问题。性能指标有很多,一般地有:

(1)落地速度 v_f 最大,或某一点的速度最大;

(2)再入飞行过程中总吸热量 $Q = \int_{t_0}^{t_f} q\mathrm{d}t$ 最小;

(3)再入飞行过程中过载的积分最小,即

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (n_x^2 + n_y^2)\mathrm{d}t = \min$$

(4)综合指标最小

$$J = Q + K_1\int_{t_0}^{t_f} (n_x^2 + n_y^2)\mathrm{d}t = \min$$

(5)横向机动距离最大,即当有横向机动飞行时,希望横向机动距离最大。

对整个弹道的约束,除了攻角、过载外,也可以对热流及温度作出限制。

最佳的再入机动弹道既可以是空间的,也可以是平面的,但更多的是讨论平面机动弹道问题。本章先讨论平面最佳弹道,然后讨论空间最佳弹道,并对计算两点边值问题的计算方法进行讨论。

§4.1 平面最佳再入机动弹道的数学模型

设计最佳机动弹道一般用平面弹道模型，认为地球为不旋转的圆球，此时的弹道方程由式(2-5-23)知

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{C_x\rho v^2 S}{2m} - g\sin\Theta = f_1(v,\Theta,h,\alpha) \\
\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{C_y\rho v S}{2m} - \frac{g\cos\Theta}{v} + \frac{v\cos\Theta}{R_0+h} = f_2(v,\Theta,h,\alpha) \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= v\sin\Theta = f_3(v,\Theta) \\
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{R_0 v\cos\Theta}{R_0+h} = f_4(v,\Theta,h)
\end{aligned}\right\}
\tag{4-1-1}
$$

取 v、Θ、h、L 为状态变量，$\boldsymbol{x}=(v,\Theta,h,L)^T$ 为状态矢量，则要求从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=(v_0,\Theta_0,h_0,L_0)^T$ 转移到终态 $\boldsymbol{x}(t_f)=(v_f,\Theta_f,h_f,L_f)^T$ 且使性能指标最佳。因为性能指标不一样，其最佳控制也不一样，下面通过几个具体例子，讨论最佳弹道的数学模型。

§4.1.1 末速为最大时的数学模型

设已知初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=(v_0,\Theta_0,h_0,L_0)^T$，要求转移到终端时刻 $t=t_f$ 时，$\Theta(t_f)=\Theta_f$，$h(t_f)=h_f$，$L(t_f)=L_f$，且 $v(t_f)$ 达到最大，其中 Θ_f、h_f、L_f 为 $t=t_f$ 时要求达到的状态变量值。

因为弹道方程不显含时间 t，所以状态方程代表的系统为一自治系统，又仅要求 $\Theta(t_f)=\Theta_f$，$h(t_f)=h_f$，$L(t_f)=L_f$，而 t_f 是不固定的，所以它是一个控制有约束、终端某些状态变量有约束、而终端时间 t_f 不固定的典型最佳控制问题。

根据极大值原理，令哈密尔顿函数为

$$
H = \lambda_v f_1 + \lambda_\Theta f_2 + \lambda_h f_3 + \lambda_L f_4 \tag{4-1-2}
$$

则最佳弹道应满足的条件是：

(1)状态变量和共轭变量应满足如下方程：

令 $x = (v, \Theta, h, L)^T, \lambda = (\lambda_v, \lambda_\Theta, \lambda_h, \lambda_L)^T$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{4-1-3}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4-1-4}$$

(2)共轭变量应满足横截条件：

$$\lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^T \nu\right\}_{t=t_f} \tag{4-1-5}$$

(3)哈密尔顿函数

$$H(t) = H(t_0) = H(t_f) = 0 \tag{4-1-6}$$

(4)最优控制变量 α_{opt} 应使哈密尔顿函数最大

$$H(\alpha_{opt}, x, \lambda) \geqslant H(\alpha, x, \lambda) \tag{4-1-7}$$

(5)满足边界条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{4-1-8}$$

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0$$

其中

$$\psi = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Theta(t_f) - \Theta_f\\ h(t_f) - h_f\\ L(t_f) - L_f\end{bmatrix} = 0 \tag{4-1-9}$$

$$\phi = J = v$$

把式(4-1-3)和式(4-1-4)展开写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= -\frac{C_x \rho v^2 S}{2m} - g\sin\Theta = f_1(v, \Theta, h, \alpha)\\
\dot{\Theta} &= \frac{C_y \rho v S}{2m} - \frac{g\cos\Theta}{v} + \frac{v\cos\Theta}{R_0 + h} = f_2(v, \Theta, h, \alpha)\\
\dot{h} &= v\sin\Theta = f_3(v, \Theta)\\
\dot{L} &= \frac{v\cos\Theta R_0}{R_0 + h} = f_4(v, \Theta, h)
\end{aligned}\right\} \tag{4-1-10}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda}_v &= C_x \frac{\rho v^2 S}{2m}\left(\frac{2}{v} + \frac{C_x^M}{a}\frac{1}{C_x}\right)\lambda_v - \left[C_y \frac{\rho v S}{2m}\left(\frac{1}{v} + \frac{C_y^M}{aC_y}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{g}{v^2} + \frac{1}{R_0 + h}\right)\cos\Theta\right]\lambda_\Theta - \sin\Theta\lambda_h - \frac{R_0}{R_0 + h}\cos\Theta\lambda_L \\
\dot{\lambda}_\Theta &= g\cos\Theta\lambda_v - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{R_0 + h}\right)\sin\Theta\lambda_\Theta - v\cos\Theta\lambda_h \\
&\quad + v\sin\Theta \frac{R_0}{R_0 + h}\lambda_L \\
\dot{\lambda}_h &= \left[- C_x \frac{\rho v^2 S}{2m}\left(\beta - \frac{C_x^h}{C_x}\right) - \frac{2g}{R_0 + h}\sin\Theta\right]\lambda_v \\
&\quad + \left[C_y \frac{\rho v S}{2m}\left(\beta - \frac{C_y^h}{C_y}\right) + \frac{v\cos\Theta}{(R_0 + h)^2} - \frac{2g\cos\Theta}{(R_0 + h)v}\right]\lambda_\Theta \\
&\quad + 0\lambda_h + \frac{R_0 v\cos\Theta}{(R_0 + h)^2}\lambda_L \\
\dot{\lambda}_L &= 0
\end{aligned}\right\}
\tag{4-1-11}
$$

$$
\begin{aligned}
t = t_0 = 0 \quad & \boldsymbol{x}(0) = (v_0, \Theta_0, h_0, L_0)^T \\
t = t_f \quad & \boldsymbol{\lambda}(t_f) = (1, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
H = {} & \lambda_v\left(-\frac{C_x \rho v^2 S}{2m} - g\sin\Theta\right) + \lambda_\Theta\left(\frac{C_y^\alpha \alpha \rho v S}{2m}\right. \\
& \left. + \frac{v\cos\Theta}{R_0 + h} - \frac{g\cos\Theta}{v}\right) + \lambda_h v\sin\Theta + \lambda_L \frac{R_0 v\cos\Theta}{R_0 + h}
\end{aligned}
\tag{4-1-12}
$$

而最佳控制变量 α_{opt} 应使哈密尔顿函数最大，从哈密尔顿函数 H 的表达式(4-1-12)看出，它具体的形式与空气动力系数的表达式有关，对于远程导弹的弹头而言，在小攻角高速的范围内可取

$$
\left.\begin{aligned}
C_x &= C_{x0} + C_x^\alpha \alpha^2 \\
C_y &= C_y^\alpha \alpha
\end{aligned}\right\}
\tag{4-1-13}
$$

其中 $C_{x0}, C_y^\alpha, C_x^\alpha$ 为常数，但 $C_x^\alpha \neq \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}$

哈密尔顿函数 H 可表示成

$$H(\alpha)=H_1(\alpha)+H_2 \tag{4-1-14}$$

其中 $H_1(\alpha)$ 为与控制变量 α 有关的部分，而 H_2 为与控制变量 α 无关的部分。使 H 最大，即要求 $H_1(\alpha)$ 最大。而

$$\begin{aligned} H_1(\alpha) &= -\lambda_v \frac{C_x^\alpha \alpha^2 \rho v^2 S}{2m} + \lambda_\Theta \frac{C_y^\alpha \rho v S \alpha}{2m} \\ &= \left(-\lambda_v C_x^\alpha \alpha^2 + \lambda_\Theta \frac{C_y^\alpha \alpha}{v}\right)\frac{qS}{m} \end{aligned} \tag{4-1-15}$$

通过分析，α_{opt} 应满足如下条件：

$$\alpha_{opt}=\begin{cases} \alpha_{max}Sign(\lambda_\Theta) & 当\ \lambda_v<0 \\ \alpha^* & 当\ \lambda_v\geqslant 0\ 且\ |\alpha^*|\leqslant \alpha_{max} \\ \alpha_{max}Sign(\lambda_\Theta) & 当\ \lambda_v\geqslant 0\ 且\ |\alpha^*|>\alpha_{max} \end{cases} \tag{4-1-16}$$

其中 α^* 由 $\partial H_1(\alpha)/\partial\alpha=0$ 得出

$$\alpha^*=\frac{C_y^\alpha \lambda_\Theta}{2C_x^\alpha v\lambda_v} \tag{4-1-17}$$

因 $\partial^2 H_1(\alpha)/\partial\alpha^2=(-\lambda_v C_x^\alpha \cdot 2)\frac{qS}{m}$，当 $\lambda_v>0$ 时

$$\partial^2 H_1(\alpha)/\partial\alpha^2<0$$

故求出的 α^* 使 $H(\alpha^*)$ 为极大值。

α_{max} 受两个因素约束，一个是攻角本身不能太大，设为 α_{max1}，另一个因素是受法向法载的限制即

$$\alpha_{max2}=\frac{n_{ymax}mg_0}{C_y^\alpha \times 0.5\times \rho v^2 S} \tag{4-1-18}$$

而 α_{max1} 和 α_{max2} 中的较小者，即为所取的 α_{max}.

需要求解的未知数为 $v,\Theta,h,L,\lambda_v,\lambda_\Theta,\lambda_h,\lambda_L,\alpha$ 及 t_f，而方程(4-1-10)、(4-1-11)、(4-1-6)和(4-1-16)也共有十个方程，是可以解出的，不过共轭变量 λ 给出的是终端值 $\lambda(t_f)$，且 ν_1,ν_2,ν_3 只是确定的，但其大小并不知，是两点边值问题，其解法将在后面讨论。

§4.1.2 总吸热量为最小时的数学模型

飞行器再入时有时要求综合性能指标最大即

$$\phi = \mu(t_f) = \int_0^{t_f} [-C\rho^{1/2}v^3 - K(\frac{qS}{m})^2(C_y^2 + C_x^2)]dt \tag{4-1-19}$$

最大，其中 $C\rho^{1/2}v^3$ 表示热流，$(\frac{qS}{m})^2(C_y^2+C_x^2)$ 表示空气动力产生加速度的平方，K 为热流和总加速度平方之间的加权因子，所以 $\phi=\mu(t_f)$ 最大，即总加热量和过载积分最小，如 $K=0$，$\mu(t_f)=-Q(t_f)$ 最大，即总吸热量最小。

此时的状态方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= -\frac{C_x \rho v^2 S}{2m} - g\sin\Theta = f_1 \\
\dot{\Theta} &= C_y \frac{\rho v S}{2m} - \frac{g\cos\Theta}{v} + \frac{v\cos\Theta}{R_0 + h} = f_2 \\
\dot{h} &= v\sin\Theta = f_3 \\
\dot{\mu} &= -C\rho^{1/2}v^3 - K(\frac{qS}{m})^2(C_x^2 + C_y^2) = f_4 \\
\dot{L} &= \frac{R_0 v\cos\Theta}{R_0 + h} = f_5
\end{aligned}\right\} \tag{4-1-20}$$

控制变量为 α，对 t_f 不作要求，也是一个终端状态变量有约束、终端时间自由的最佳控制问题。

令哈密尔顿函数

$$H = f_1\lambda_v + f_2\lambda_\Theta + f_3\lambda_h + f_4\lambda_\mu + f_5\lambda_L \tag{4-1-21}$$

其中 λ_v、λ_Θ、λ_h、λ_μ、λ_L 为共轭变量，$\lambda=(\lambda_v,\lambda_\Theta,\lambda_h,\lambda_\mu,\lambda_L)^T$ 为共轭矢量。

根据极大值原理最佳弹道应满足如下条件：

(1)状态矢量 x 和共轭矢量 λ 应满足如下方程：

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{4-1-22}$$

其展开式为(4-1-20)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4-1-23}$$

其展开式

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda}_v &= C_x \frac{\rho v S}{m}\lambda_v + \left[C_y \frac{\rho S}{2m} + \left(\frac{g}{v^2} + \frac{1}{R_0 + h}\right)\cos\Theta\right]\lambda_\Theta \\
&\quad - \sin\Theta\lambda_h + \left[3C\rho^{1/2}v^2 + K(C_x^2 + C_y^2)\left(\frac{\rho^2 S^2}{4m^2}\right)4v^3\right]\lambda_\mu \\
&\quad - \frac{R_0}{R_0 + h}\cos\Theta\lambda_L \\
\dot{\lambda}_\Theta &= g\cos\Theta\lambda_v - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{R_0 + h}\right)\sin\Theta\lambda_\Theta - v\cos\Theta\lambda_h \\
&\quad + 0\lambda_\mu + v\sin\Theta\frac{R_0}{R_0 + h}\lambda_L \\
\dot{\lambda}_h &= \left(-C_x\frac{\rho v^2 S}{2m}\beta - \frac{2g}{R_0 + h}\sin\Theta\right)\lambda_v + \left[C_y\frac{\rho v S}{2m}\beta\right. \\
&\quad \left. + \frac{v\cos\Theta}{(R_0 + h)^2} - \frac{2g}{(R_0 + h)}\cos\Theta\right]\lambda_\Theta + 0 \cdot \lambda_h \\
&\quad - \left(Cv^3\rho^{1/2}\frac{\beta}{2} + K\frac{v^4 S^2}{4m^2}(C_x^2 + C_y^2)2\rho^2\beta\right]\lambda_\mu \\
&\quad + \frac{R_0 v\cos\Theta}{(R_0 + h)^2}\lambda_L \\
\dot{\lambda}_\mu &= 0 \\
\dot{\lambda}_L &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-1-24}$$

推导式(4-1-24)时，假设 C_x^M、C_y^M、C_x^h、C_y^h 均为零。

(2)共轭矢量应满足横截条件：

$$\lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \nu\right\}_{t=t_f} \tag{4-1-25}$$

(3)哈密尔顿函数

$$H(t_f) = H(t_0) = H(t) = 0 \tag{4-1-26}$$

(4)最佳控制 α_{opt} 应使哈密尔顿函数取最大值

$$H(\alpha_{opt}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \geqslant H(\alpha, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{4-1-27}$$

(5)满足边界条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \psi(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) = 0 \end{cases} \tag{4-1-28}$$

其中

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t_f) - v_f \\ \Theta(t_f) - \Theta_f \\ h(t_f) - h_f \\ L(t_f) - L_f \end{bmatrix} = 0$$

v_f、Θ_f、h_f、L_f 为终端时刻 v、Θ、h、L 的要求值。

最佳控制变量 α_{opt} 应使 $H(\alpha)$ 最大，而 $H(\alpha)$ 可以分成与控制变量 α 有关的 $H_1(\alpha)$ 和无关的 H_2。

$$H(\alpha) = H_1(\alpha) + H_2$$

$$H_1(\alpha) = -\frac{\rho v^2 S}{2m} C_x \lambda_v + \frac{\rho v S}{2m} C_y \lambda_\Theta - K\left(\frac{\rho v^2 S}{2m}\right)^2 (C_x^2 + C_y^2) \lambda_\mu \tag{4-1-29}$$

$$H_2 = -\lambda_v g \sin\Theta + \lambda_\Theta\left(-\frac{g\cos\Theta}{v} + \frac{v\cos\Theta}{R_0 + h}\right) + \lambda_h v \sin\Theta - C\rho^{1/2} v^3 \lambda_\mu + \lambda_L \frac{v R_0 \cos\Theta}{R_0 + h}$$

为了使 H 最大，即要求 $H_1(\alpha)$ 最大，$H_1(\alpha)$ 的具体形式与 C_y，C_x 的表达式有关。对宇宙飞行器假设：

$$\left.\begin{aligned} C_x &= C_{x0} + C_x^\alpha \sin^2\alpha \\ C_y &= C_y^\alpha \sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4-1-30}$$

其中 $C_{x0}, C_x^{\alpha}, C_y^{\alpha}$ 为常数，显然 $C_x^{\alpha} \neq \partial C_x/\partial\alpha \quad C_y^{\alpha} \neq \partial C_y/\partial\alpha$. 代式(4-1-30)入式(4-1-29)，可以看出 $H_1(\alpha)$ 是 α 的非线性函数。找一个 $\alpha(t)$ 使 $H_1(\alpha)$ 在满足约束 $\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}$ 条件下最大是一个非线性规划问题。但因为是一个变量的问题，较易获得。首先找极值点，对 $H_1(\alpha)$ 求偏导数

$$\frac{\partial H_1(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{qS}{m}[A\lambda_\mu \sin 2\alpha\cos 2\alpha + (-C_x^{\alpha}\lambda_v - \lambda_\mu B) \cdot \sin 2\alpha + \frac{\lambda_\theta}{v}C_y^{\alpha}\cos 2\alpha]$$

其中

$$\begin{cases} A = K[\frac{qS}{m}(C_x^{\alpha})^2 - \frac{qS}{m}(C_y^{\alpha})^2] \\ B = -K\frac{qS}{m}(2C_{x0} + C_x^{\alpha})C_x^{\alpha} \end{cases}$$

令 $\partial H_1(\alpha)/\partial\alpha = 0$ 可以得到极值点（不一定是一个），但这些极值点不一定是极大点，更不一定是最优点，为此应求出二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 H_1(\alpha)}{\partial\alpha^2} = \frac{qS}{m}[\frac{1}{2}A\lambda_\mu\cos 4\alpha + (-C_x^{\alpha}\lambda_v - \lambda_\mu B)2\cos 2\alpha + \frac{\lambda_\theta}{v}C_y^{\alpha}2(-\sin 2\alpha)]$$

如果 $\partial^2 H_1(\alpha)/\partial\alpha^2 < 0$ 是极大点，否则为极小点，但极大点还应与边界点（$\alpha=\alpha_{max}$、$\alpha=\alpha_{min}$）进行比较，找出最优点。可见对综合性能指标找 α_{opt} 是较繁的。如果只考虑总吸热量最小的问题，即 $K=0$，则可以得到显式：

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} \alpha_{max}Sign(\lambda_\theta) & \text{当 } \lambda_v < 0 \\ \alpha^* & \text{当 } \lambda_v \geqslant 0 \text{ 且 } |\alpha^*| \leqslant \alpha_{max} \\ \alpha_{max}Sign(\lambda_\theta) & \text{当 } \lambda_v \geqslant 0 \text{ 且 } |\alpha^*| > \alpha_{max} \end{cases} \tag{4-1-31}$$

其中 α^* 可以由 $\partial H_1(\alpha)/\partial\alpha = 0$ 得到

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{C_y^{\alpha}\lambda_\theta}{C_x^{\alpha}\lambda_v v} \tag{4-1-32}$$

而 α_{max} 仍由攻角与过载的限制加以确定。

§4.2 空间最佳再入机动弹道的数学模型

§4.2.1 落速最大的空间再入机动弹道的数学模型

为了提高突防效果，躲避对方的拦截，以及用末制导系统修正落点的偏差，提高命中精度，再入飞行器作机动飞行是必要的。为了增加突防效果和提高命中精度，不仅要求纵向机动，横向也要求机动，所以要建立空间最佳再入机动弹道的数学模型。

空间再入机动弹道的优化有不同的提法，一种是要求从再入点 $x_0(r_0,\phi_0,\lambda_0)$ 转移到 $x_f(r_f,\phi_f,\lambda_f)$，且使 x_f 点的速度 v_f 最大。另外也可以要求从再入点 x_0 转移到 x_f，在纵向射程一定（或自由）时，使横向机动射程最大。本小节讨论第一个问题，横向机动射程最大的问题放在下一小节讨论。

1. 两种控制方式

由式(2-5-3)和式(2-5-4)知，在不考虑推力作用时质心空间运动方程为：

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{v} &= -C_x\frac{\rho v^2 S}{2m} - g\sin\theta_T = f_1\\
\dot{\theta}_T &= C_y\frac{\rho v S}{2m}\cos\nu - C_z\frac{\rho v S}{2m}\sin\nu - \frac{g\cos\theta_T}{v} + \frac{v\cos\theta_T}{r} = f_2\\
\dot{\sigma}_T &= -C_z\frac{\rho v S}{2m\cos\theta_T}\cos\nu - C_y\frac{\rho v S}{2m\cos\theta_T}\sin\nu\\
&\quad + \frac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} = f_3\\
\dot{\phi} &= \frac{v\cos\sigma_T\cos\theta_T}{r} = f_4\\
\dot{\lambda} &= \frac{-v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} = f_5
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\dot{r}=v\sin\theta_T=f_6 \quad (4\text{-}2\text{-}1)$$

上述方程共有六个状态变量，即确定质心位置(r,λ,ϕ)和质心速度大小和方向(v,σ_T,θ_T)，而控制变量按前面瞬时平衡假设应为α、β、ν，这是因为飞行器绕质心转动运动相对地讲比质心运动进行得快，可以把飞行器看作为一个放大环节，不把舵偏角δ_φ、δ_ψ和δ_γ当作控制变量，而把α、β、ν作为控制变量。相应地应有三个控制通道来完成δ_φ对攻角α、δ_ψ对侧滑角β和δ_γ对倾侧角ν的控制。但这种控制方式不是唯一的。目前国内外文献常用两个控制变量即总攻角η和倾斜角ϕ'，但此角ϕ'不是倾侧角ν，更不是γ，它有特定的定义。显然用两个控制变量分析问题比用三个控制变量分析问题要简单。另一方面为了改善战术导弹的性能，例如地空导弹的性能，近廿年来，对倾斜转弯BTT(Bank—to—turn)技术进行了广泛的研究。它是用导弹绕纵轴滚动而使升力位于所需的法向力平面，即飞行中侧滑角$\beta=0$，用俯仰和滚动通道的极坐标控制方式来代替俯仰通道和偏航通道的直角坐标控制方式。类似的在航天器空间交会的末制导中有所谓导引平面控制，即将升力控制在导引平面内对航天器的运动进行控制。对再入飞行器的空间机动弹道也有两种控制方式，一种是装有四个控制舵的直角坐标控制方式，另一种是装有二个控制舵的极坐标控制方式。从工程的实现来讲，后者比较容易些，它在主对称面内装两个控制舵，用它来控制总攻角、总升力，而用安装在尾部的姿态控制发动机控制飞行器绕纵轴的滚动，以改变总升力方向，从而实现飞行器的空间机动。而另外一种装有四个控制舵，分别在俯仰和偏航通道控制攻角α和侧滑角β，以改变升力Y和侧力Z，从而实现飞行器的空间机动，称双通道控制，当然也要用姿态控制系统控制飞行器的姿态，以保证倾侧角ν满足一定的要求。

2. ν、ϕ_2与ϕ'的关系

倾侧角ν是半速度坐标系和速度坐标系之间绕ox_v轴的转

角。而滚动角 γ 是反映飞行器绕纵轴 ox_1 的滚动。实际飞行中也是通过对滚动角 γ 的控制来实现对倾侧角 ν 的控制。从坐标系间的转换矩阵知，已知 θ_T、σ_T、α、β、ν 时可以算出 γ 角的大小。但当采用总攻角 η、总升力 L 时要引进倾斜角 ϕ'，它不是倾侧角 ν，也不是滚动角 γ。ϕ' 的定义如图 4-1 所示。

总升力 L 与升力 Y（即 o_1y_v 方向）的夹角 ϕ_2，且规定图示的 ϕ_2 为正角，总升力 L 与 o_1y_h 间的夹角为倾斜角 ϕ'，且规定由 o_1y_h 转向总升力 L 的方向其转轴沿 o_1x_v 正向其转角为正，图 4-1 的 ϕ' 为正角。

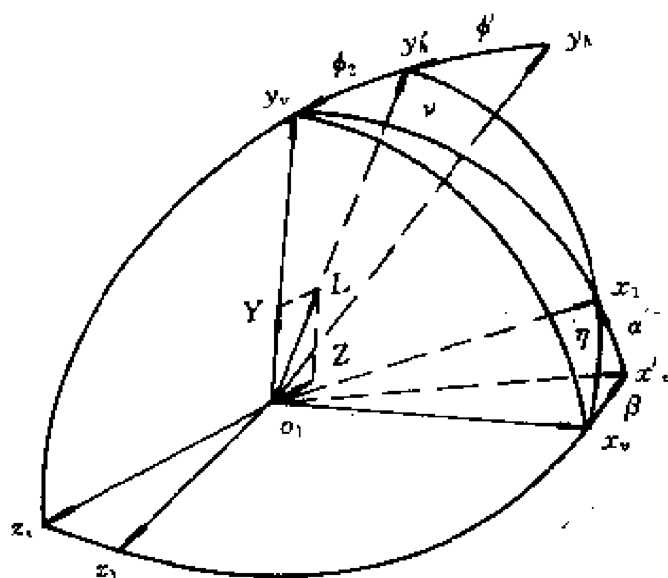


图 4-1　总升力、总攻角、ϕ'、ϕ_2、ν 的关系图

已知
$$L = Y + Z \tag{4-2-2}$$

将式(4-2-2)投影到半速度坐标系 o_1y_h、o_1z_h 上可以得：

$$L\cos\phi' = Y\cos\nu - Z\sin\nu$$

$$L\sin\phi' = Z\cos\nu + Y\sin\nu$$

故
$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{Z\cos\nu + Y\sin\nu}{Y\cos\nu - Z\sin\nu} \tag{4-2-3}$$

而
$$\mathrm{tg}\phi_2 = \frac{-Z}{Y} \tag{4-2-4}$$

则式(4-2-3)变成

$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{\mathrm{tg}\nu - \mathrm{tg}\phi_2}{1 + \mathrm{tg}\nu\mathrm{tg}\phi_2} = \mathrm{tg}(\nu - \phi_2) \tag{4-2-5}$$

因图 4-1 中 ϕ'，ϕ_2，ν 均为正值，则

$$\phi' = \nu - \phi_2 \tag{4-2-6}$$

而 ϕ_2 由式(2-3-35)知

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi_2 &= \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\eta} \\ \cos\phi_2 &= \frac{\sin\alpha}{\sin\eta} \end{aligned}\right\} \tag{4-2-7}$$

而
$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\beta \tag{4-2-8}$$

故当已知 α、β、ν 时可以求出 ϕ' 值。

当气动力对称，如再入弹头、载人飞船返回舱，且小攻角、小侧滑角时，可近似认为

$$L = L^\eta\eta,\quad Y = Y^\alpha\alpha,\quad Z = Z^\beta\beta$$

且
$$L^\eta = Y^\alpha = -Z^\beta$$

则式(4-2-3)可改写成

$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{-\beta\cos\nu + \alpha\sin\nu}{\alpha\cos\nu + \beta\sin\nu} = \frac{-\beta + \alpha\mathrm{tg}\nu}{\alpha + \beta\mathrm{tg}\nu} \tag{4-2-9}$$

前已假定 σ_T、θ_T、ν 是地理坐标系与速度坐标系按 2-3-1 次序转动时的欧拉角，而飞行器坐标系与地理坐标系的关系，可以按不同的次序转动，如果也按 2-3-1 的次序转动，则由矩阵关系可得：

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{-\sin\beta\sin\theta_T + \cos\beta\cos\theta_T\sin\nu}{\sin\alpha\cos\beta\sin\theta_T + \cos\alpha\cos\theta_T\cos\nu - \sin\alpha\sin\beta\sin\nu\sin\theta_T} \tag{4-2-10}$$

从式(4-2-4)看出，若 $\beta=0$，$Z=0$，$\phi_2=0$，则

$$\phi' = \nu$$

但
$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{\cos\theta_T \sin\nu}{\sin\alpha\sin\theta_T + \cos\alpha\cos\theta_T\cos\nu} \tag{4-2-11}$$

即 $\gamma \neq \nu, \gamma \neq \phi'$，只有 $\beta=0$、$\alpha=0$. 才有

$$\gamma = \nu = \phi'$$

3. 控制变量为 α、β、ν 时的最佳弹道的数学模型

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^T=(v,\theta_T,\sigma_T,\phi,\lambda,r)^T$ 为状态矢量，$\boldsymbol{u}=(\alpha,\beta,\nu)^T$ 为控制矢量，性能指标是 $J=v_f$ 为最大。

哈密尔顿函数

$$H=\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4+\lambda_5 f_5+\lambda_6 f_6 \tag{4-2-12}$$

其中
$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)^T\\&=(\dot{v},\dot{\theta}_T,\dot{\sigma}_T,\dot{\phi},\dot{\lambda},\dot{r})^T\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)^T$ 为共轭矢量。

则可以建立状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_5)^T \tag{4-2-13}$$

显然其展开式就是式(4-2-1)

共轭方程为：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}}&=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\\&=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_2}\\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_6} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4-2-14}$$

其中$\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial f_6}{\partial x_6}$为式(4-2-1)右函数的偏导数，例如

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial v}=-C_x\frac{qS}{m}\left(\frac{2}{v}+\frac{C_x^v}{C_x}\right)\cdot\frac{\partial f_6}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}=0$$

其余见本章附录 A。

为了求出最佳控制矢量 $\boldsymbol{u}$，应确定 C_y、C_z 与 α 的关系，对小攻角可以设 $C_y=C_y^\alpha\alpha$，$C_z=C_z^\beta\beta$，

$$C_x=C_{x0}+C_x^\alpha\eta^2=C_{x0}+C_x^\alpha(\alpha^2+\beta^2)$$

将 C_x、C_y、C_z 代入哈密尔顿表达式(4-2-12)且将 $H(\boldsymbol{u})$分成与控制变量有关的 $H_1(\boldsymbol{u})$及无关的 H_2，其中

$$H_1(\boldsymbol{u})=\left(-C_x\frac{qS}{m}\right)\lambda_1+\left(C_y^\alpha\frac{qS}{mv}\alpha\cos\nu-C_z^\beta\frac{qS}{mv}\sin\nu\right)\lambda_2$$
$$+\left(-\frac{C_z^\beta qS}{mv\cos\theta_T}\beta\cos\nu-\frac{C_y^\alpha qS}{mv\cos\theta_T}\alpha\sin\nu\right)\lambda_3 \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

根据极大值原理，控制变量 $\boldsymbol{u}(\alpha,\beta,\nu)$应满足如下方程：

$$\frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial\alpha}=\left(-\frac{\partial C_x}{\partial\alpha}\lambda_1+\frac{C_y^\alpha\cos\nu}{v}\lambda_2-\frac{C_y^\alpha\sin\nu}{v\cos\theta_T}\lambda_3\right)\frac{qS}{m}=0$$
$$(4\text{-}2\text{-}16)$$

$$\frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial\beta}=\left(-\frac{\partial C_x}{\partial\beta}\lambda_1-C_z^\beta\frac{\sin\nu}{v}\lambda_2-\frac{C_z^\beta\cos\nu}{v\cos\theta_T}\lambda_3\right)\frac{qS}{m}=0$$
$$(4\text{-}2\text{-}17)$$

$$\frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial\nu}=\Big[(-\alpha\sin\nu+\beta\cos\nu)\lambda_2$$
$$+\left(\frac{-\alpha\cos\nu}{\cos\theta_T}-\frac{\beta\sin\nu}{\cos\theta_T}\right)\lambda_3\Big]\frac{qS}{m}=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}18)$$

由式(4-2-18)得

$$\sin\nu\left(-\alpha\lambda_2-\beta\frac{\lambda_3}{\cos\theta_T}\right)+\cos\nu\left(\beta\lambda_2-\frac{\alpha\lambda_3}{\cos\theta_T}\right)=0$$

$$\mathrm{tg}\nu=\frac{\sin\nu}{\cos\nu}=\frac{\beta\lambda_2-\dfrac{\alpha\lambda_3}{\cos\theta_T}}{\alpha\lambda_2+\beta\dfrac{\lambda_3}{\cos\theta_T}} \qquad (4\text{-}2\text{-}19)$$

将 $C_x=C_{x0}+C_x^\alpha(\alpha^2+\beta^2)$ 代入式(4-2-16)、式(4-2-17)，则该两式变成

$$-2C_x^\alpha\alpha\lambda_1+C_y^\alpha\frac{\cos\nu}{v}\lambda_2-C_y^\alpha\frac{\sin\nu}{v\cos\theta_T}\lambda_3=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}20)$$

$$-2C_x^\alpha\beta\lambda_1+C_y^\alpha\frac{\sin\nu}{v}\lambda_2+C_y^\alpha\frac{\cos\nu}{v\cos\theta_T}\lambda_3=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}21)$$

联立解式(4-2-19)、式(4-2-20)和式(4-2-21)可以得最佳控制变量 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt}。

当然解出的 $\eta\leqslant\eta_{max}$，现在可以限制

$$|\alpha|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_{max}$$

$$|\beta|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_{max}$$

同时求出的 α_{opt}、β_{opt} 应满足

$$\alpha_{opt}\leqslant\alpha'$$
$$\beta_{opt}\leqslant\beta'$$

α'，β' 由法向过载，侧向过载的限制值加以确定。

为了解状态方程，共轭方程还应给出：

初始条件 $\quad \boldsymbol{x}(t_o)=\boldsymbol{x}_o$

横截条件 $\quad \boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}}+(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{\nu}$

终端约束 $\quad \boldsymbol{\psi}=0$

终端约束的具体形式与讨论的问题有关，放在后面讨论。

4. 控制变量为 η、ϕ 时的最佳弹道的数学模型

状态变量 v、θ_T、σ_T、ϕ、λ、r 与控制变量为 α、β、ν 时的一样，令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^T=(v,\theta_T,\sigma_T,\phi,\lambda,r)^T$。控制变量 $\boldsymbol{u}=(\eta,\phi')^T$

构造哈密尔顿函数 $\quad H=\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}$

则状态方程 $\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$

其展开式可由式(4-2-1)令 $\beta=0,\nu=\phi'$ 得到。

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{v} &= -C_x\frac{qS}{m}-g\sin\theta_T=f_1\\
\dot{\theta}_T &= C_L^\alpha\eta\frac{qS}{mv}\cos\phi'-\frac{g\cos\theta_T}{v}+\frac{v\cos\theta_T}{r}=f_2\\
\dot{\sigma}_T &= -C_L^\alpha\eta\frac{qS}{mv\cos\theta_T}\sin\phi'+\frac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T}=f_3\\
\dot{\phi} &= \frac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r}=f_4\\
\dot{\lambda} &= \frac{-v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi}=f_5\\
\dot{r} &= v\sin\theta_T=f_6
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-2-22}
$$

共轭方程

$$
\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}
=-\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_6}{\partial x_1}\\
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_6}{\partial x_2}\\
 & \cdots & \cdots & \\
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_6} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_6} & \cdots & \dfrac{\partial f_6}{\partial x_6}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}
\tag{4-2-23}
$$

其中$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f_6}{\partial x_6}$为 $f_1,\cdots,f_6$ 对 $x_1,\cdots,x_6$ 的偏导数，具体表达式见本章附录 B。

将 $C_x=C_{x0}+C_x^\alpha\eta^2$ 代入哈密尔顿函数 H，且令与 u 有关的为 $H_1(u)$，无关的为 H_2，则

$$H_1(u) = -C_x \frac{qS}{m}\lambda_1 + C_z^\eta \eta \frac{qS}{mv}\cos\phi' \lambda_2 - C_z^\eta \eta \frac{qS\sin\phi'}{mv\cos\theta_T}\lambda_3 \tag{4-2-23}$$

根据极大值原理 η、ϕ' 应满足下述两式：

$$\frac{\partial H_1}{\partial \eta} = \left(-\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\lambda_1 + C_z^\eta \frac{\cos\phi'}{v}\lambda_2 - \frac{C_z^\eta \sin\phi'}{v\cos\theta_T}\right)\frac{qS}{m} = 0 \tag{4-2-24}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \phi'} = C_z^\eta \eta \frac{qS}{mv}(-\sin\phi')\lambda_2 - C_z^\eta \eta \frac{qS\cos\phi'}{mv\cos\theta_T}\lambda_3 = 0 \tag{4-2-25}$$

由式(4-2-25)可得：

$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{\sin\phi'}{\cos\phi'} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2\cos\theta_T} \tag{4-2-26}$$

由式(4-2-24)得

$$\eta = \frac{C_z^\eta \cos\phi' \lambda_2 - \dfrac{C_z^\eta \sin\phi'}{\cos\theta_T}\lambda_3}{2C_x^\alpha \lambda_1 v} = \frac{C_z^\eta \lambda_2}{2C_x^\alpha \lambda_1 v\cos\phi'} \tag{4-2-27}$$

解式(4-2-26)和式(4-2-27)可以得最佳控制变量 η_{opt}、ϕ'_{opt}。

解出的 η_{opt} 应满足 $\eta_{opt} \leqslant \eta_{max}$，同时也应满足由过载条件限制的 $\eta_{opt} \leqslant \eta'$。

两个控制变量的其它条件，如初始条件、边界条件、横截条件同以 α、β、ν 为控制变量的情况相同。

上面已分别求出以 α、β、ν 为控制变量及以 η 和 ϕ' 为控制变量的最优弹道，而 α、β、ν、η 和 ϕ' 之间又有一定的关系，那么求出的 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt} 与 η_{opt}、ϕ'_{opt} 之间是否满足这关系呢？这个问题与气动力是否对称和 α、β 的大小有关。

(1)气动力对称，且 α、β 为小量的情况

如果已知 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt}，则由式(4-2-8)和式(4-2-9)可以唯一确

定 η 及 ϕ'，此时总升力 L 是一样的。又因对小角度而言，$C_x = C_{x0} + C_x^{\alpha}(\alpha^2+\beta^2)$，而对总攻角 η 而言，$\eta^2=\alpha^2+\beta^2$，故阻力系数 $C_x = C_{x0} + C_x^{\alpha}\eta^2 = C_{x0} + C_x^{\alpha}(\alpha^2+\beta^2)$，即二者阻力系数一样，故阻力也是一样的，因而弹道是唯一的。这一点也可以这样说明。

因
$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{-\beta + \alpha \mathrm{tg}\nu}{\alpha + \beta \mathrm{tg}\nu} \tag{4-2-9}$$

而控制变量为 α、β、ν 时的 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt} 已求出，将 ν_{opt} 代入式(4-2-9)可得：

$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2 \cos\theta_T}$$

它与以控制变量为 η、ϕ' 求出的 ϕ'，即式(4-2-26)的 ϕ' 是一致的。

又因在 α、β 较小时，$\eta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，以 α、β、ν 为控制变量的 α_{opt}、β_{opt} 由式(4-2-20)和式(4-2-21)可得：

$$\alpha = \frac{C_y^{\alpha}\cos\nu\lambda_2 - C_y^{\alpha}\sin\nu\lambda_3/(\cos\theta_T)}{2C_x^{\alpha}v\lambda_1} \tag{4-2-28}$$

$$\beta = \frac{C_y^{\alpha}\sin\nu\lambda_2 + C_y^{\alpha}\cos\nu\lambda_3/(\cos\theta_T)}{2C_x^{\alpha}v\lambda_1} \tag{4-2-29}$$

代 α_{opt}、β_{opt} 入 $\eta=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ 可得：

$$\eta = \frac{C_y^{\alpha}(\lambda_2^2 + \lambda_3^2/\cos^2\theta_T)^{1/2}}{2C_x^{\alpha}\lambda_1 v} = \frac{C_y^{\alpha}\lambda_2}{2C_x^{\alpha}v\lambda_1}(1 + \mathrm{tg}^2\phi')^{1/2}$$

$$= \frac{C_y^{\alpha}\lambda_2}{2C_x^{\alpha}\lambda_1 v\cos\phi'} \tag{4-2-30}$$

对小攻角，气动力对称，$C_y^{\alpha}=C_L^{\eta}$，故式(4-2-30)求出的 η 与以 η、ϕ' 为控制变量求出的 η，即式(4-2-27)是一致的。

但反过来，如果已知 η_{opt}、ϕ'_{opt}，是否可唯一地求出 α_{opt}、β_{opt} 及 ν_{opt} 呢？

因为只有两个方程式

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\eta \tag{4-2-8}$$

$$\mathrm{tg}\phi' = \frac{-\beta + \alpha\mathrm{tg}\nu}{\alpha + \beta\mathrm{tg}\nu} \tag{4-2-9}$$

不能确定 α、β、ν。事实上，任给一合适的 α_{1opt}，由式(4-2-8)可以确定 β_{1opt}，再从式(4-2-9)可以确定 ν_{1opt}，它显然也应是最优弹道，即是由 η、ϕ' 确定的一条弹道。那么再给一个 α_{2opt}，利用式(4-2-8)和式(4-2-9)也可以确定 β_{2opt}、ν_{2opt}。它是否是同一条最优弹道呢？答案是最佳弹道是唯一的，只是在 α、β 较小时表现形式不同而已。

因为 η、ϕ' 一定，则总升力大小和方向一定，又因 $C_x = C_{x0} + C_x^\alpha \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$，虽然 α、β 大小不一样，但 $(\alpha^2 + \beta^2)$ 的大小是一样的，所以其阻力也一样，因而其最佳弹道是唯一的。

(2)气动力对称，但 α、β、η 较大的情况

因气动力对称，仍可采用 η、ϕ' 为控制变量，当确定了 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt} 仍可通过式(4-2-8)和式(4-2-9)唯一的确定 η_{opt}、ϕ'_{opt}，没有多解问题。

但反过来已知 η_{opt}、ϕ'，仍然有多解问题，因为这时仍可以在合适的范围内选择，其弹道是相同的。问题是当 α、β、η 较大时，仍假设 $C_y = C_y^\alpha \alpha$，$C_z = C_z^\beta \beta$，其误差较大，一般地说 α_{opt}、β_{opt}、ν_{opt} 的显示得不出，只有用其他方法，如迭代法才能得到最优解。

(3)气动力不对称，但 α、β 较小

气动力不对称是指像航天飞机的轨道飞行器，它类似飞机，显然 $C_y^\alpha \neq -C_z^\beta$，$C_x(\alpha_1, \beta_1) \neq C_x(\alpha_2, \beta_2)$，所以一般要用三个控制变量 α，β，ν。此时利用关系式(4-2-8)和式(4-2-9)也可以得到 η 及 ϕ'，但反过来由 η 和 ϕ' 是得不到唯一的 α、β 和 ν，因为选用不同的 α、β 组合，由于 $C_y^\alpha \neq -C_z^\beta$，故总升力不一样，又由于 $C_x(\alpha_1, \beta_1) \neq C_x(\alpha_2, \beta_2)$，故阻力也不同，因此弹道不一样，即最佳弹道不是唯一的。

但在实际应用中，当 β 较小，可近似认为 $\beta = 0$，则 $\eta = \alpha$，可利用 ϕ' 对运动的纵向和侧向进行控制，例如载人飞船返回舱的再入便是这样。

§4.2.2 横程最大的空间再入机动弹道的数学模型

空间最佳再入机动弹道，对载人飞船和航天飞机的返回再入轨道常提出再入飞行器最大横向机动距离为多少？以确定横向机动能力。如文献[16]专门研究了该问题。因为机动飞行时间长、距离远，弹道计算中必须考虑地球旋转和扁率的影响。

1. 纵程和横程

横程有不同的定义，如《远程火箭弹道学》就专门有定义，本章定义的纵程和横程如图4-2所示。

图4-2 纵程和横程示意图

设再入时刻飞行器质心与地心连线与地球表面的交点为e，即再入坐标系的原点e，而预计的着陆点为f(这里的着陆点对载入飞船来讲实际上是载入飞船返回舱的开伞点，开伞点距地球表面约10km高度，因此e点是指距地球表面10km处与地心同心的同心球面的交点，下同)，而实际的着陆点为f'，相应的e点、f点和f'点的纬度和经度设为$e(\phi_0,\lambda_0)$，$f(\phi_f,\lambda_f)$，$f'(\phi'_f,\lambda'_f)$。

为了方便，讨论纵程和横程时认为地球为圆球，图4-2中ef是过e、f两点的大圆弧，ef'是过e、f'两点的大圆弧，σ_0是沿ef大

圆弧切线与正北方向的夹角，σ_o' 是沿 ef' 大圆弧切线与正北方向的夹角，f''是过 f' 作垂直于 ef 大圆弧的垂线与 ef 的交点，称 ef' 为总射程，ef''为从 e 点开始飞过的纵向距离，简称为纵程 R，$f'f''$为偏离 ef 大圆弧的横向距离，简称为横程 Z.

由图 4－2 球面三角形 eff'知

$$\sin Z = \sin\beta_c \sin(\sigma_o - \sigma_o') \tag{4-2-31}$$

$$\cos R = \cos\beta_c / \cos Z \tag{4-2-32}$$

其中 Z 的符号由 $\sigma_o - \sigma_o'$ 的符号来确定，图 4-2 横程 Z 为负值。Z、R、β_c 以地心矢大小 r_f 为度量单位，下同。

为了求横程，从式(4-2-31)看出需知 β_c、σ_o、σ_o' 的大小。如何求 β_c，σ_o，σ_o' 可参考图 4-3。

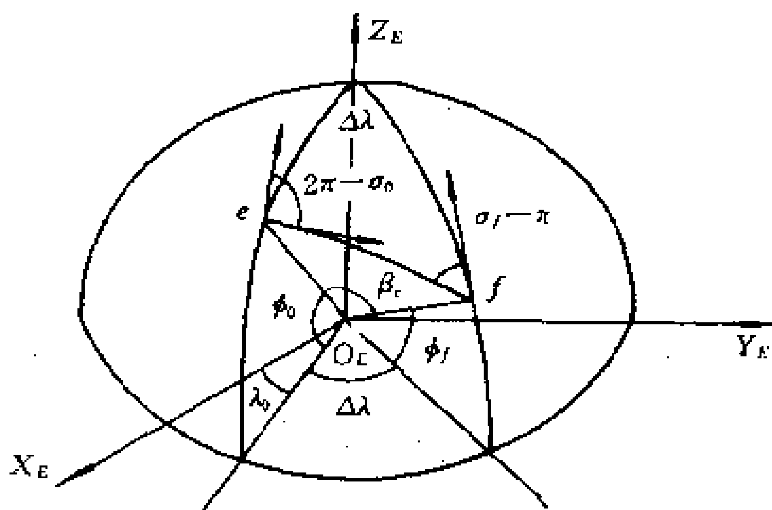


图 4-3 e 点、f 点的经纬度和 β_c、σ 的关系

由图 4-3 知：

$$\cos\beta_c = \sin\phi_o \sin\phi_f + \cos\phi_o \cos\phi_f \cos\Delta\lambda \tag{4-2-33}$$

$$\sin(2\pi - \sigma_o) = -\sin\sigma_o = \frac{\cos\phi_f \sin\Delta\lambda}{\sin\beta_c} \tag{4-2-34}$$

其中$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_o$.

类似的可以得：

$$\cos\beta'_c = \sin\phi_0\sin\phi'_f + \cos\phi_0\cos\phi'_f\cos\triangle\lambda' \qquad (4\text{-}2\text{-}35)$$

$$\sin(2\pi - \sigma'_0) = -\sin\sigma'_0 = \frac{\cos\phi'_f\sin\Delta\lambda'}{\sin\beta_c} \qquad (4\text{-}2\text{-}36)$$

其中$\triangle\lambda' = \lambda'_f - \lambda_0$.

e、f 点的经纬度是已知的，当已知落点 f' 的经纬度便可以求出横程，也可写成 $Z = Z(\phi'_f, \lambda'_f)$。

2. 横程最大的机动弹道数学模型

因为要考虑地球旋转和扁率的影响，不能用简化模型式(2-5-3)，而应该用式(2-4-27)。一般再入机动不用推力，可令式(2-4-27)中 P_{xh}、P_{yh}、P_{zh} 为零，且控制变量用总攻角 η 和倾斜角 ϕ'，可令式(2-4-27)中 $C_y\cos\nu - C_z\sin\nu = C_L\cos\phi'$，$C_z\cos\nu + C_y\sin\nu = C_L\sin\phi'$，则可以得到描述空间机动弹道的状态方程(略去控制力 F_{cxh}、F_{cyh}、F_{czh})：

$$\dot{v} = -C_D\frac{qS}{m} - \frac{fM}{r^2}[1 + J(\frac{a_e}{r})^2(1 - 5\sin^2\phi)]\sin\theta_T$$

$$- \frac{2fM}{r^2}J(\frac{a_e}{r})^2\sin\phi(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi)$$

$$- \omega_e^2 r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\cos\theta_T - \cos^2\phi\sin\theta_T) = f_1$$

$$\dot{\theta}_T = C_L\frac{qS}{mv}\cos\phi' - \frac{fM}{r^2}[1 + J(\frac{a_e}{r})^2(1 - 5\sin^2\phi)]\frac{\cos\theta_T}{v}$$

$$+ \frac{2fM}{r^2}J(\frac{a_e}{r})^2\sin\phi(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T - \cos\phi\cos\theta_T)\frac{1}{v}$$

$$+ \frac{\omega_e^2 r}{v}(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T + \cos^2\phi\cos\theta_T)$$

$$- 2\omega_e\cos\phi\sin\sigma_T + \frac{v\cos\theta_T}{r} = f_2$$

$$\dot{\sigma}_T = -C_L\frac{qS}{mv\cos\theta_T}\sin\phi' + \frac{2fM}{r^2}J(\frac{a_e}{r})^2\sin\phi\cos\phi\frac{\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\omega_e^2 r\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T}-\frac{2\omega_e}{\cos\theta_T}(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\sigma_T\\
&-\sin\phi\cos\theta_T)+\frac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T}=f_3\\
&\dot{\phi}=v\cos\theta_T\cos\sigma_T/r=f_4\\
&\dot{\lambda}=-v\cos\theta_T\sin\sigma_T/(r\cos\phi)=f_5\\
&\dot{r}=v\sin\theta_T=f_6
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-2-37}
$$

令状态矢量　　$\boldsymbol{x}=(v,\theta_T,\sigma_T,\phi,\lambda,r)^T$

右函数矢量　　$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)^T$

共轭矢量　　$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6))^T$

状态方程可简写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}$$

哈密尔顿函数

$$H=\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_3f_3+\lambda_4f_4+\lambda_5f_5+\lambda_6f_6 \tag{4-2-38}$$

则共轭方程为　　$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

展开可得：

$$
\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\\ \dot{\lambda}_4\\ \dot{\lambda}_5\\ \dot{\lambda}_6\end{bmatrix}
=-
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_6} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}
\tag{4-2-39}
$$

其中$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i,j=1,\cdots,6)$是右函数的偏导数，可由类似附录 B 的方法求出。

最佳控制变量 $\boldsymbol{u}=(\eta,\phi')$ 应使哈密尔顿函数 H 最大，从哈密

尔顿函数式(4-2-38)看出，为确定 H 的大小，应给出 C_L、C_D 与 η 的关系，因为总攻角 η 较大，$C_L=C_L^\eta\eta$ 的线性关系不成立。求横程最大的最佳弹道不以(η,ϕ')为控制变量，而以 $u=(C_L,\phi')$ 为控制变量，阻力系数给出的也是 C_D 与 C_L 的关系，常用的为 $C_D=C_{D0}+KC_L^2$，当 C_L 确定时，因 C_{D0} 为常数，C_D 也确定了。而 C_L 已知，如何求 η 角，就需要反查气动系数，由 C_L 反查 η.

将 $C_D=C_{D0}+KC_L^2$ 代入哈密尔顿函数 H 式(4-2-38)，且将与控制变量有关的写成 $H_1(\boldsymbol{u})$，无关的表示成 H_2，则

$$H_1(\boldsymbol{u})=\frac{qS}{m}\left(-C_D\lambda_1+C_L\frac{\cos\phi'\lambda_2}{v}-C_L\frac{\lambda_3\sin\phi'}{v\cos\theta_T}\right)$$

(4-2-40)

根据极大值原理，控制变量 C_{Lopt}，ϕ'_{opt} 应满足如下方程：

$$\frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial\phi'}=\frac{qS}{mv}C_L(-\sin\phi')\lambda_2-\frac{qS}{mv}\frac{C_L}{\cos\theta_T}\cos\phi'\lambda_3=0$$

故

$$\mathrm{tg}\phi'_{opt}=\frac{-\lambda_3}{\lambda_2\cos\theta_T}\tag{4-2-41}$$

$$\frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial C_L}=\frac{qS}{m}\left(-2KC_L\lambda_1+\cos\phi'\lambda_2/v-\frac{\sin\phi'\lambda_3}{v\cos\theta_T}\right)=0$$

对上式进行化简可得：

$$C_{Lopt}=\frac{\lambda_2}{2vK\lambda_1\cos\phi'}\tag{4-2-42}$$

求出的 C_{Lopt}，ϕ'_{opt} 应受限制，例如可取：

$$C_{Lopt}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2}{2vK\lambda_1\cos\phi'} & \text{当 } |C_L|\leqslant C_{L\max}\\ C_{L\max}Sign(C_L) & \text{当 } |C_L|>C_{L\max}\end{cases}\tag{4-2-43}$$

$\phi'_{\min}<\phi'_{opt}<\phi'_{\max}$，例如可取 $\phi'_{\max}=90°$，$\phi'_{\min}=-90°$.

若假设总攻角 η 较小，$C_L=C_L^\eta\eta$，$C_D=C_{D0}+K(C_L^\eta)^2\alpha^2=C_{D0}+C_T^\alpha\alpha^2$，$K(C_L^\eta)^2=C_T^\alpha$，则式(4-2-42)可化成

$$\eta_{opt} = \frac{\lambda_2 C_L^\eta}{2v\lambda_1 C_x^\alpha \cos\phi'} \tag{4-2-44}$$

比较式(4-2-26)和(4-2-41)、式(4-2-27)和式(4-2-44)可见 η_{opt}、ϕ'_{opt}的表达式同求落速最大的空间机动弹道的 η_{opt}、ϕ'_{opt}是一样。

为了解状态方程、共轭方程应给出：

初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

横截条件 $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial J}{\partial x}+(\frac{\partial \psi}{\partial x})^T \boldsymbol{\nu}$

终端约束 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)=0$

终端约束的具体形式，将放在后面的计算方法中讨论。

§4.3 最佳弹道的计算方法讨论

解两点边值问题有各种方法，文献[11]、[14]均有介绍，因为控制有约束、终端有约束，用梯度法要用控制有约束的梯度投影恢复法，会遇到步长选择、投影恢复问题。而用边值打靶法或邻近极值算法，就计算最佳再入机动弹道而言，计算思路明确、应用起来较方便，本节介绍边值打靶法及其改进。

所谓边值打靶法或者邻近极值法就是用迭代的方法来改善初值条件的估值，以满足规定的终端条件。从方程式(4-1-20)和式(4-1-24)看出只要给出一组 $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$就可以得到一条弹道，但问题是积分到什么时候为止，当积分到选定 t_f 时，终端约束不一定得到满足，所以应该改变初值 $\boldsymbol{\lambda}(t_0)=\boldsymbol{\lambda}_0$，使其最后满足终端约束，这里有几种不同的处理方法：

(1)边值打靶法

因为 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=-\partial H/\partial \boldsymbol{x}$，对 $\boldsymbol{\lambda}$ 变量而言，它是一个线性方程组，故 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 增加相同的倍数时，不会影响控制变量的值，也就是不影响状态方程的解。因此在 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 中可以把某一个 λ_{i0}取任意值，其余的 λ_i

值根据经验加以估计，并选定一个 t_f，利用 $H(t_f)=0$ 及终端约束，反复迭代可以找到一个满足要求的最佳弹道。

(2)邻近极值法

上述的边值打靶法算两点边值问题，虽然可行，但没有充分利用极大值原理给出的必要条件。边值打靶法是用逐步迭代的方法，从给定的弹道中找满足终端约束和 $H=0$ 的最佳弹道，这对自治系统、终端时间自由的最佳弹道问题是可以改进的。人们可以从最佳弹道簇中找满足终端约束的最佳弹道。这是因为 $H(t)=0$，故 $H(t_0)=0$ 即

$$H(t_0)=\sum_{i=1}^{n}f_{i0}\lambda_{i0}=0 \tag{4-3-1}$$

利用式(4-3-1)，可以找出某一 λ_{j0}，因此可以假设一 λ_0，再利用关系(4-3-1)计算出一 λ_{j0}，剩下仅估计 $n-2$ 个 λ_0 值，且因为 $H=0$，又满足最优控制的条件，所以计算的弹道均为最佳弹道，通过反复迭代可以从最佳弹道簇中找出满足终端约束的最佳弹道。

(3)改进的邻近极值法

虽然邻近极值法已比边值打靶法简单一些，但实际上还可以更简单一些。因为邻近极值算法是从最佳弹道簇中去找满足终端约束条件的一条最佳弹道，而 t_f 是不固定的，它是由找到满足终端条件的弹道中自然确定的。因此可在数值积分状态方程时，不一定取 $t=t_f$ 来停止运算，而用一终端条件得到满足来停止运算，那么选择 t_f 的问题也解决了。

因此用改进的邻近极值法，对于 n 维的共轭矢量的初值，可利用共轭方程的线性性质任选一个，再利用 $H(t_0)=0$ 算出一个，因此仅需估计 $n-2$ 个，而 t_f 的选择可以利用某一终端约束条件得到满足而停止运算来自动确定。这样可以大大地减轻估计初值的困难，特别是对低维的状态方程。

§4.3.1 末速最大的平面再入机动弹道的计算方法

根据方程式(4-1-10)和式(4-1-11),此时要确定的是 λ_{v0}、$\lambda_{\Theta0}$、λ_{h0}、λ_{L0}及 t_f 五个值,这里分两种情况。

1. 对射程 L_f 不作要求,即 L_f 自由

根据极大值原理的横截条件 $\lambda_L(t_f)=0$,而 $\dot{\lambda}_L=0$,故 $\lambda_L(t_0)=\lambda_{L0}=0$. 其计算步骤如下:

(1)任意给定 λ_{v0};

(2)给出一组 $\lambda_{\Theta0}$,并根据

$$\lambda_{h0}=-\frac{f_{10}\lambda_{v0}+f_{20}\lambda_{\Theta0}}{f_{30}} \tag{4-3-2}$$

计算 λ_{h0};

(3)根据几组(λ_{v0}、$\lambda_{\Theta0}$、λ_{h0})积分状态方程和共轭方程,可以得到几组最佳弹道,但数值积分到 $\Theta(t_f)=\Theta_f$ 为止;

(4)从满足 $\Theta(t_f)=\Theta_f$ 的最佳弹道簇中找到 $h(t_f)=h_f$ 的弹道,即为所要求的最佳弹道。

$L(t_f)$自由的最佳弹道实质上是一维寻找,即找一个合适的 $\lambda_{\Theta0}$使 $h(t_f)=h_f$,而 $\Theta(t_f)=\Theta_f$ 是通过停止运算来得到的。

2. 对射程 L_f 有要求,即 L_f 不自由

因 $L(t_f)$要等于 L_f,虽然 $\dot{\lambda}_L=0$,但 λ_L 是等于未知常数而不是零,所以用改进的邻近极值法仍需估计两个初值。这里有两种方法求解初值。

第一种方法是用求"转移矩阵"的方法求最佳弹道,其计算步骤如下:

(1)给定一λ_{v0},再凭经验选二个 $\lambda_{\Theta0}$,λ_{L0};

(2)计算 λ_{h0},由 $H(t_0)=0$ 知

$$\lambda_{h0}=-\frac{f_{10}\lambda_{v0}+f_{20}\lambda_{\Theta0}+f_{40}\lambda_{L0}}{f_{30}} \tag{4-3-3}$$

(3)求“转移矩阵”及合适的 $\lambda_{\Theta 0}$，λ_{L0}

根据给出的 λ_{v0}，$\lambda_{\Theta 0}$，λ_{h0}，λ_{L0} 可积分状态方程和共轭方程，且积分到 $h(t_f)=h_f$ 时停止运算，但此时 $\Theta(t_f)\neq\Theta_f$，$L(t_f)\neq L_f$. 因此有：

$$\left.\begin{aligned}\Theta(t_f) &= f_\Theta(\lambda_{\Theta 0},\lambda_{L0})\\ L(t_f) &= f_L(\lambda_{\Theta 0},\lambda_{L0})\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}3\text{-}4)$$

线性化式(4-3-4)可得：

$$\begin{bmatrix}\Delta\Theta_f\\ \Delta L_f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_\Theta}{\partial\lambda_\Theta} & \dfrac{\partial f_\Theta}{\partial\lambda_L}\\ \dfrac{\partial f_L}{\partial\lambda_\Theta} & \dfrac{\partial f_L}{\partial\lambda_L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\lambda_{\Theta 0}\\ \Delta\lambda_{L0}\end{bmatrix}\qquad(4\text{-}3\text{-}5)$$

$$=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\Delta\lambda_{\Theta 0}\\ \Delta\lambda_{L0}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是一偏导数阵，也称转移矩阵。

故

$$\begin{bmatrix}\Delta\lambda_{\Theta 0}\\ \Delta\lambda_{L0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\Delta\Theta_f\\ \Delta L_f\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\Theta_f-\Theta(t_f)\\ L_f-L(t_f)\end{bmatrix}\qquad(4\text{-}3\text{-}6)$$

则 $\lambda_{\Theta 0}$，λ_{L0} 可通过迭代的方法求出，迭代公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\Theta 0}^{(k+1)} &= \lambda_{\Theta 0}^{(k)}+\Delta\lambda_{\Theta 0}\cdot\varepsilon\\ \lambda_{L0}^{(k+1)} &= \lambda_{L0}^{(k)}+\Delta\lambda_{L0}\cdot\varepsilon\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}3\text{-}7)$$

$\varepsilon>0$，但要适当的小。

第二种方法是用两次一维寻优的方法求最佳弹道，其计算步骤如下：

(1)任意选定 λ_{v0}、$\lambda_{\Theta 0}$，再选择不同的 λ_{L0}，数值积分状态方程可以找出使 $h(t_f)=h_f$ 的一条最佳弹道，此时的 $\Theta(t_f)=\Theta_f$ 是由数值积分停止运算的条件来实现，但此时的 $L(t_f)\neq L_f$；

(2)给出不同的 $\lambda_{\Theta 0}$，重复第一步骤，直到某一 $\lambda_{\Theta 0}$ 使 $L(t_f)=L_f$.

此时的终端约束条件 $\Theta(t_f)=\Theta_f, h(t_f)=h_f, L(t_f)=L_f$ 均满足，又满足极大值原理的必要条件，因而就是所求的最佳弹道。

如何选择 $\lambda_{\Theta0}, \lambda_{L0}$，可先在大范围、大间距、用大的数值积分步长进行搜索，当接近所要求的终端约束条件时，再在小范围、小间距、用小数值积分步长，就可以较快的找到所需的最佳弹道。如果初始的控制变量 α_0 不在边界上，又可用其他方法知控制变量初值 α_0 的近似值，则可以利用 $\alpha^*=C_y^\alpha\lambda_\Theta/(2C_x^\alpha v\lambda_v)$ 公式，因 λ_{v0} 已假设，可令 $\alpha^*=\alpha_0$ 近似估出 $\lambda_{\Theta0}$。

3. 最佳平面再入机动弹道计算举例

例一　已知 $v_0=5008\text{m/s}, \Theta_0=-14°, h_0=40000\text{m}, L_0=0$，要求转移到 $\Theta_f=0°, h_f=15000\text{m}, L_f$ 自由，t_f 自由，性能指标使 $v(t_f)$ 最大。原始数据如下：

$m=600\text{kg}, S=0.754\text{m}^2, C_{x0}=0.0774, C_x^\alpha=0.00084\quad 1/度^2$

$C_y^\alpha=0.0333\quad 1/度$。

由后面讨论知，由工程法知 $\alpha_0\approx-4°$，可以很快找到最佳弹道的初始条件如下：$\lambda_{v0}=0.8, \lambda_{\Theta0}=-921.376, \lambda_{h0}=0.0032, \lambda_{L0}=0$，$\alpha_0=-4.556°$. 终点参数如下：$v_f=3758\text{m/s}, \Theta_f=0.001°, L_f=91996\text{m}, t_f=20.45'', h_f=15002\text{m}$

图 4-4～图 4-12 表示计算结果。

图 4-4 和图 4-5 表示控制变量 α_{opt} 随高度和时间的变化曲线。图 4-6 表示法向过载 n_y 随时间变化曲线，图 4-7 至图 4-9 表示状态变量 v、Θ、h 随时间的变化曲线，图 4-10 至图 4-12 表示共轭变量 λ_v、λ_Θ、λ_h 随时间的变化曲线。从图 4-4 和图 4-5 看出为了把弹道拉平(因 $\Theta_f=0°$)且 $v(t_f)$ 达到最大，控制变量 α_{opt} 并不总是正值，即不总是向上拉起，而是 α_{opt} 先为负值，把弹道向下压，到某一高度再向上拉起，且 α_{opt} 值愈来愈大，直到限制值 α_{max} 为止。由于控制过程没有对法向过载进行限制，从图 4-6 看出法向过载 n_y 高达 43，而一般法向过载最大值 $n_{ymax}=30$. 从图 4-7 和图 4-9 看出速度和高

度随时间单调减小，但图 4-8 看出 Θ 不是单调变化，开始时 $\alpha_{opt}<0$ 故 $|\Theta|$ 增加，而后 α_{opt} 变为正值，且迅速增加，故 $|\Theta|$ 迅速减小，直到拉平为止。图 4-10 至图 4-12 是 λ_v、λ_Θ、λ_h 随时间的变化，可以看出，它们的变化平缓。

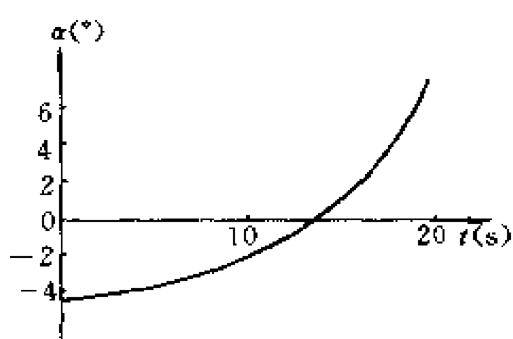


图 4-4 α 随时间的变化

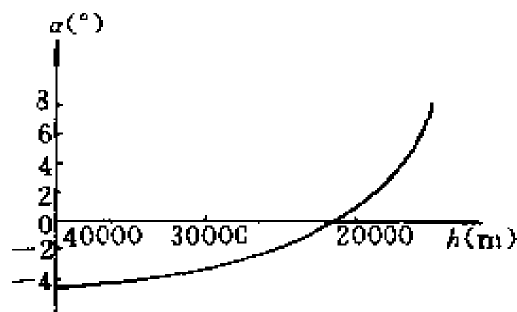


图 4-5 α 随高度的变化

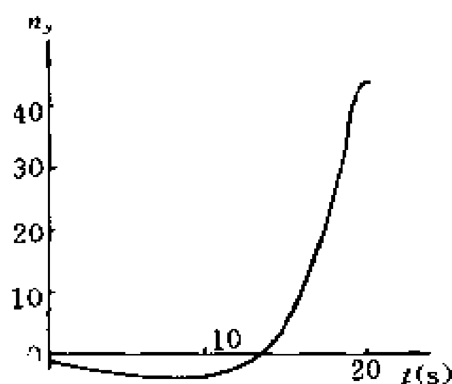


图 4-6 法向过载 n_y 随时间的变化

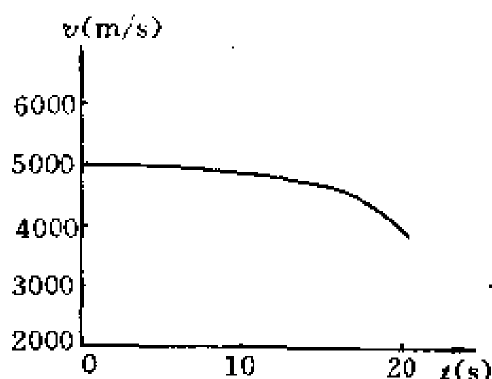


图 4-7 速度 v 随时间的变化

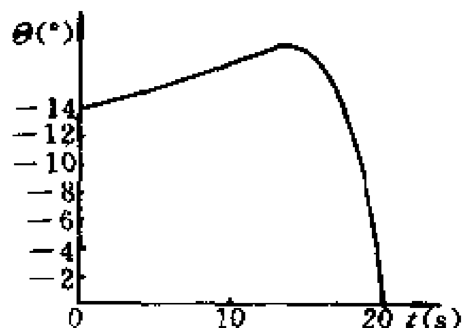


图 4-8 Θ 随时间的变化

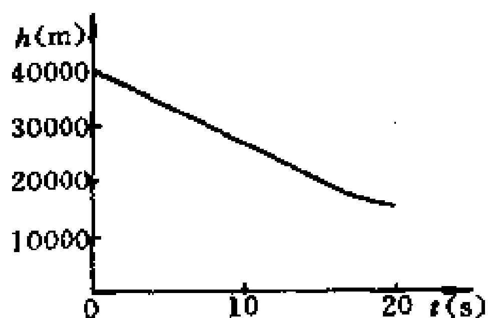


图 4-9 h 随时间的变化

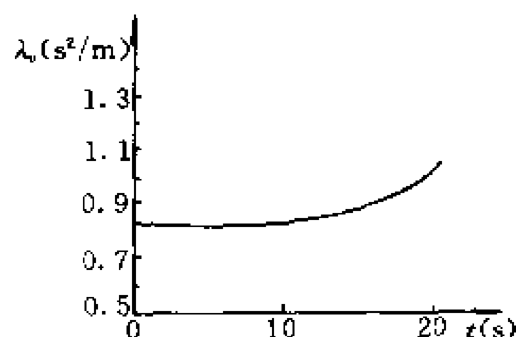


图 4-10 λ_v 随时间变化

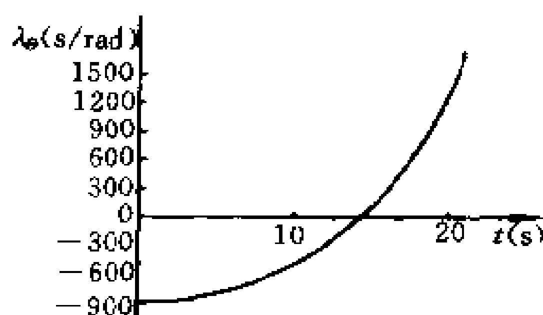


图 4-11 λ_Θ 随时间变化

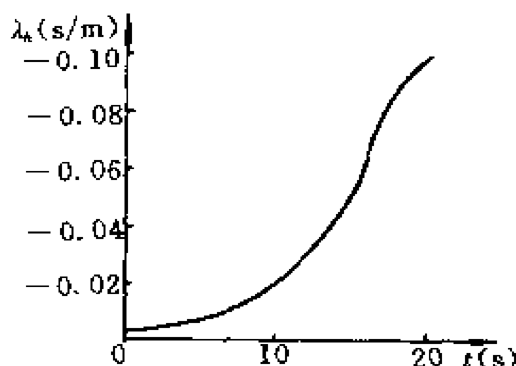


图 4-12 λ_h 随时间变化

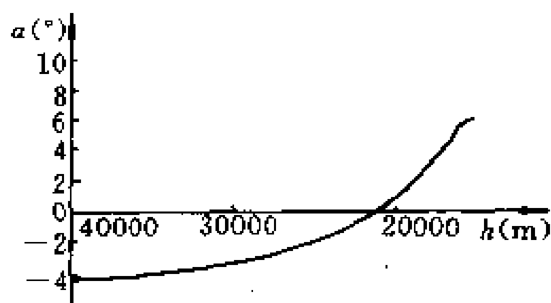


图 4-13 n_y 有限制时，α 随 h 变化

图 4-13 是限制过载后 α_{opt} 随时间的变化，受过载限制 α_{opt} 不能达到 $\alpha_{max}=9°$，仅为 6°多。

例二 原始数据同例一，但再入角 Θ_0 和再入速度有变化

①$\Theta_0=-17°$，$v_0=6500$m/s，$|\alpha|\leqslant\alpha_{max}$，$n_y$ 不受限制，其 $\alpha_{opt}(h)$ 如图 4-14 所示。

②$\Theta_0=-23°$，$v_0=6699$m/s，$|\alpha|\leqslant\alpha_{max}$，$n_y$ 不受限制，其 $\alpha_{opt}(h)$ 如图 4-15 所示。

例三 原始数据同例一，$\Theta_0=-14°$，$v_0=5008$m/s 但 L_f 有要求：$L_f=97135$m，控制过程中 α，n_y 均受限制。

因为 L_f 比射程自由时求出的 $L_f=91996$m 要大一些，故 α_0 应小一些，所以 $\lambda_{\Theta0}$ 选择小一些，且 $\lambda_{L0}<0$ 不合理，故 $\lambda_{L0}>0$，这样用

二维寻优可以较快找到最佳弹道。其 $\alpha_{opt}(h)$ 如图 4-16 所示。

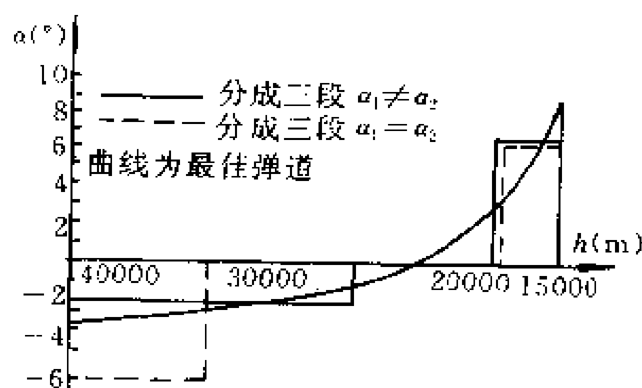


图 4-14 $\Theta_0 = -17°$，n_y 无限制时 α 随 h 的变化曲线

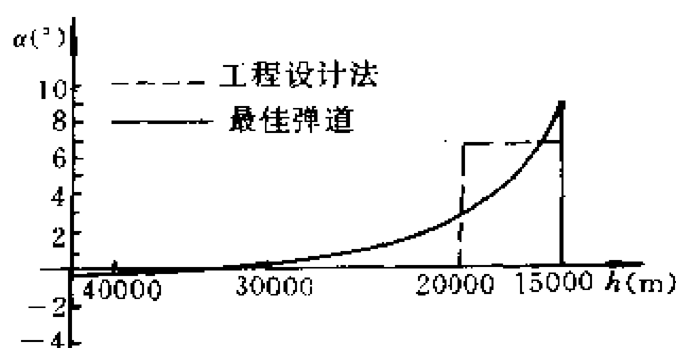


图 4-15 $\Theta_0 = -23°$，n_y 无限制时 α 随 h 的变化曲线

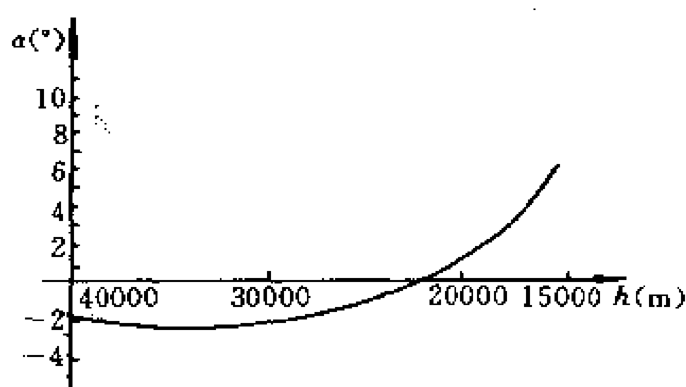


图 4-16 L_f 有限制，α、n_y 有限制时 α 随 h 变化曲线

§4.3.2 总吸热量为最小时再入机动弹道的计算方法

一般总吸热量为最小的再入机动弹道对 L_f 不作要求，因此问题便成为从 x_0 转移到 x_f 且要求

$$\psi = \begin{bmatrix} v(t_f) - v_f \\ \Theta(t_f) - \Theta_f \\ h(t_f) - h_f \end{bmatrix} = 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}8)$$

所以实际状态变量可取 $x=(v,\Theta,h,\mu)^T$，$\lambda=(\lambda_v,\lambda_\Theta,\lambda_h,\lambda_\mu)^T$. 这样，要求 $\mu(t_f)$ 最大，同 $v(t_f)$ 要求最大的计算方法和步骤是一样的。其计算步骤如下：

(1)任意选定 λ_{v0}，因为它的大小不影响状态方程的解；

(2)因为讨论问题的 t_f 自由，故

$$H(t_0) = \lambda_{v0} f_{10} + \lambda_{\Theta 0} f_{20} + \lambda_{h0} f_{30} + \lambda_{\mu 0} f_{40} = 0$$

如果给出 $\lambda_{\Theta 0}$，λ_{h0}就可以求出 $\lambda_{\mu 0}$.

(3)利用 $v(t_f)=v_f$ 停止运算来确定计算时间 t_f，但这样选定的 $\lambda_{\Theta 0}$，λ_{h0}不一定使$\Theta(t_f)=\Theta_f$，$h(t_f)=h_f$，可以通过选择 $\lambda_{\Theta 0}$，λ_{h0}使$\Theta(t_f)=\Theta_f$，$h(t_f)=h_f$. 具体的可以通过二维寻找或者用“转移矩阵”法求出。

例四　研究一超圆速度的再入。已知 $v_0=10773\text{m/s}$，$h_0=121978\text{m}$，$\Theta_0=-8.09°$，$\mu_0=0$，要求转移到 $v_f=8230\text{m/s}$，$\Theta_f=0$，$h_f=76196\text{m}$ 且使 $\mu=-Q$ 达到最大，即总吸热量最小。已知其他原始数据如下：$m=3645\text{kg}$，$S=6.11\text{m}^2$，$C_x=0.274+1.8\sin^2\alpha$，$C_y=1.2\sin\alpha\cos\alpha$.

经过计算其 $\alpha_{opt}(t)$，$h(t)$的关系图如图 4-17.

从图 4-17 看出，为了满足终端约束，且总吸热量最小，高度不是单调变化，而是迅速下降到较稠密的大气层，使其减速，而后 α 变为负值使弹道变平达到$\Theta(t_f)\approx 0$ 的要求。

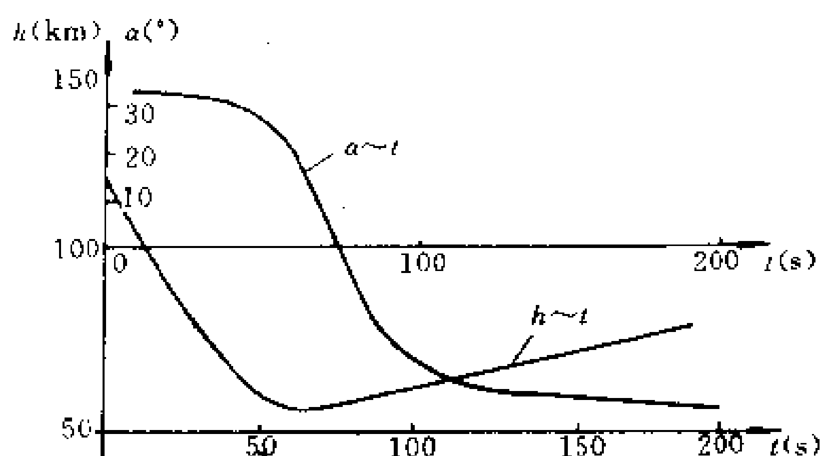


图 4-17 总吸热量最小时 α、h 随 t 的变化曲线

§4.3.3 落速最大的空间再入机动弹道的计算方法

以控制变量为 η、ϕ' 为例进行讨论，此时的状态方程为式(4-2-22)，共轭方程为式(4-2-23)，而控制变量 η、ϕ' 由式(4-2-26)和式(4-2-27)决定。从式(4-2-22)和式(4-2-23)看出，如果用一般的边值打靶法需给出共轭方程 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\partial H/\partial \boldsymbol{x}$ 的六个初值和数值积分停止时间 t_f.

但如果采用改进的邻近极值法只需给出四个共轭方程的初值，t_f 值可用某一终端约束得到满足停止积分运算自动确定。

假设对终点的位置 $\boldsymbol{r}(\phi,\lambda,r)$ 有要求，而速度方向 θ_{Tf}，σ_{Tf}是自由的，但速度大小要求最大，t_f 是自由的。

1. 计算方法和步骤

根据邻近极值算法，共轭方程的初值 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{v0},\lambda_{\theta T0},\lambda_{\sigma T0},\lambda_{\phi 0},\lambda_{\lambda 0},\lambda_{r0})^T$ 中 λ_{v0}可任意选定，由 $H=\sum_{i=1}^{6}\lambda_{i0}f_{i0}=0$ 可计算出 $\lambda_{\theta T0}$，可任意选定四个 $\boldsymbol{\lambda}$ 初值 $\lambda_{\sigma T0}$、$\lambda_{\phi 0}$，$\lambda_{\lambda 0}$、λ_{r0}，通过数值积分到 $r(t_f)=r_f$ 来确定 t_f.

因对位置有要求，即要求 $\phi(t_f)=\phi_f, \lambda(t_f)=\lambda_f$，又因 σ_{Tf}, θ_{Tf} 自由所以 $\lambda_{\theta T}(t_f)=0, \lambda_{\sigma T}(t_f)=0$，故要求的终点约束是 $y=(\phi, \lambda, \lambda_{\theta T}, \lambda_{\sigma T})^T=(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ 为 $\tilde{y}=(\phi_f, \lambda_f, 0, 0)^T$

记共轭矢量四个可调初值为 Z

$$\begin{aligned} Z &= (\lambda_{\sigma T0}, \lambda_{\phi 0}, \lambda_{\lambda 0}, \lambda_{r0})^T \\ &= (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40})^T \\ &= (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \end{aligned} \tag{4-3-9}$$

记满足终端约束条件的 λ 的初值为 $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} = (\tilde{\lambda}_{10}, \tilde{\lambda}_{20}, \tilde{\lambda}_{30}, \tilde{\lambda}_{40})^T \tag{4-3-10}$$

$$\Delta y = y - \tilde{y}, \Delta Z = Z - \tilde{Z} \tag{4-3-11}$$

因为 Z 给定，则 y 便确定，故

$$y = f_y(Z) \tag{4-3-12}$$

$$\tilde{y} = f_y(\tilde{Z}) \tag{4-3-13}$$

线性化(4-3-12)可得：

$$\Delta y = y - \tilde{y} \approx \left(\frac{\partial f_y}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z \triangleq G\Delta Z = G(Z - \tilde{Z}) \tag{4-3-14}$$

$G=\partial f_y/\partial Z$ 是偏导数值组成的矩阵，也称“转移矩阵”，当 G^{-1} 存在时

$$\Delta Z = G^{-1}\Delta y \tag{4-3-15}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \phi(t_f) - \phi_f \\ \lambda(t_f) - \lambda_f \\ \lambda_{\theta T}(t_f) - 0 \\ \lambda_{\sigma T}(t_f) - 0 \end{bmatrix} \tag{4-3-16}$$

这样可以通过终端误差 Δy 对共轭矢量的初值进行修正

$$Z' = Z + \varepsilon\Delta Z \tag{4-3-17}$$

其中 $\varepsilon>0$，但要足够的小。可以重复以上步骤直到 $Z'\rightarrow\tilde{Z}$ 终端约束条件得到满足为止。

2. 转移矩阵 G 的计算

令

$$G=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \tag{4-3-18}$$

由式(4-3-14)知

$$\Delta y = G\Delta Z$$

当仅存在 Δz_i 时($i=1,2,3,4$)时，由 Δz_i 产生的误差为$\Delta \boldsymbol{y}^i=(\Delta y_1^i, \Delta y_2^i, \Delta y_3^i, \Delta y_4^i)^T$，于是可得

$$\begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \\ g_{4i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z_i}\begin{bmatrix} \Delta y_1^i \\ \Delta y_2^i \\ \Delta y_3^i \\ \Delta y_4^i \end{bmatrix} \quad i=1,2,3,4 \tag{4-3-19}$$

例如当存在 ΔZ_1 时，终端误差为 Δy^1，则

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ g_{41} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z_1}\begin{bmatrix} \Delta y_1^1 \\ \Delta y_2^1 \\ \Delta y_3^1 \\ \Delta y_4^1 \end{bmatrix} \tag{4-3-20}$$

同理可以得到转移矩阵 G 的其他列元素。

§4.3.4 横程最大空间再入机动弹道的计算方法

由§4.2.2 知机动弹道的状态方程为式(4-2-37)，共轭方程为式(4-2-39)，控制变量为 C_L、ϕ'，而最佳控制变量 C_{Lopt}、ϕ'_{opt} 由式(4-2-41)和式(4-2-43)确定。用一般的边值打靶法需给出共轭矢量的初值 λ_0 和积分时间 t_f 共七个量，求解是很繁的。如果采用邻

近极值算法，只需给出五个共轭变量的初值，t_f 值可通过使某一终端约束条件得到满足而停止积分来自动确定。

对横程最大的再入机动弹道，其飞行时间 t_f 是不作要求的，即是自由的，状态变量终端约束除要求 $r(t_f)=r_f$ 外，其余五个状态变量 $v_f, \theta_{Tf}, \sigma_{Tf}, \phi_f, \lambda_f$ 均无要求，仅要求落点的横程最大。

前已说明横程 $Z=Z(\phi'_f,\lambda'_f)$，ϕ'_f、λ'_f 是落点的纬度和经度。根据极大值原理，最佳弹道的横截条件可用下式决定

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial Z(\phi'_f,\lambda'_f)}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\nu} \tag{4-3-21}$$

现
$$\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{r}_f) = 0 \qquad \boldsymbol{\nu} = \nu_1$$

则

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) \\ \lambda_3(t_f) \\ \lambda_4(t_f) \\ \lambda_5(t_f) \\ \lambda_6(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial Z/\partial\phi \\ \partial Z/\partial\lambda \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \nu_1 \end{bmatrix} \tag{4-3-22}$$

因为共轭方程为线性微分方程组，将终端横截条件改成如下形式，不会影响最佳控制变量的大小和状态方程的解。

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) \\ \lambda_3(t_f) \\ \lambda_4(t_f) \\ \lambda_5(t_f) \\ \lambda_6(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1/k_2 \\ 1 \\ \nu_1/k_2 \end{bmatrix} \tag{4-3-23}$$

其中 $k_1=\dfrac{\partial Z(\phi'_f,\lambda'_f)}{\partial\phi}$，$k_2=\dfrac{\partial Z(\phi'_f,\lambda'_f)}{\partial\lambda}$，是落点经度、纬度的函数。

根据上述横截条件如何确定共轭矢量的初值 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 呢？λ_{10} 可选

定，但应保证 $\lambda_5(t_f)=1$，而 λ_{20} 由 $H(t_0)=\sum_{i=1}^{6} f_{i0}\lambda_{i0}=0$ 可计算出，通过数值积分，用状态变量 $r(t_f)=r_f$ 来确定 t_f，剩下还需确定四个共轭矢量初值 λ_{30}、λ_{40}、λ_{50}、λ_{60}，可通代迭代的方法来确定，目的是当 $t=t_f$ 时终端约束条件得到满足，即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t_f)-0 \\ \lambda_2(t_f)-0 \\ \lambda_3(t_f)-0 \\ \lambda_4(t_f)-k_1/k_2 \end{bmatrix}=0 \tag{4-3-24}$$

具体的作法可设

$$\boldsymbol{Z}=(\lambda_{30},\lambda_{40},\lambda_{50},\lambda_{60})^T=(z_1,z_2,z_3,z_4)^T$$

$$\boldsymbol{y}=(\lambda_1(t_f),\lambda_2(t_f),\lambda_3(t_f),\lambda_4(t_f))^T=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$$

设满足终端约束的 $\boldsymbol{Z}=\tilde{\boldsymbol{Z}}$，$\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{y}}=(0,0,0,k_1/k_2)^T$

因为给定 $\boldsymbol{Z}$，通过积分状态方程可得到 $\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{Z}) \tag{4-3-25}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{f}_y(\tilde{\boldsymbol{Z}}) \tag{4-3-26}$$

线性化式(4-3-25)可得

$$\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}\approx\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_y}{\partial \boldsymbol{Z}}\right)_0\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z}-\tilde{\boldsymbol{Z}}) \tag{4-3-27}$$

其中 $\boldsymbol{G}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_y}{\partial \boldsymbol{Z}}\right)_0$。若 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 存在则

$$\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}^{-1}\Delta\boldsymbol{y} \tag{4-3-28}$$

而

$$\Delta\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \lambda_1(t_f)-0 \\ \lambda_2(t_f)-0 \\ \lambda_3(t_f)-0 \\ \lambda_4(t_f)-k_1/k_2 \end{bmatrix}=0$$

若终端约束得不到满足，可以利用 $\Delta\boldsymbol{y}$ 对共轭矢量初值进行修正

$$\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{Z}+\varepsilon\Delta\boldsymbol{Z} \tag{4-3-29}$$

其中 $\varepsilon>0$，但要足够的小。可重复以上步骤，直到终端约束条件得

到满足为止。

最后，回答一个问题，为什么当 $\Delta y=0$ 时，所求的弹道是所要求的最佳弹道呢？这是因为当共轭矢量 λ_0 扩大 k_2 倍时，不影响控制变量的大小和状态方程的解，而根据共轭方程为线性微分方程的特点，当 λ_0 扩大 k_2 倍时，共轭矢量的 $\lambda(t_f)$ 也扩大 k_2 倍，变成为 $(0,0,0,k_1,k_2,\nu_1)^T$，因 r 通过 $r(t_f)=r_f$ 停止积分运算已得到保证，C_L、ψ' 满足最佳控制变量条件，而终端约束条件 $\lambda(t_f)=(0,0,0,k_1,k_2,\nu_1)^T$ 也得到满足，故其状态方程的解，即为所求横程最大的再入机动弹道。

最佳弹道的计算方法，或者最优控制问题的计算方法，国内外有不少书刊研究了这个问题。如《最优控制问题的计算方法》[14]是国内早期专门讨论最优控制问题计算方法的书。它研究了用梯度法解无约束和有约束的最优控制问题的数值方法，也讨论了解两点边值问题的计算方法，但大量的篇幅是研究梯度法及其推广的方法解最优控制问题。《应用最优控制——最优化·估计·控制》[11]也讨论了最优控制问题的数值算法，讨论了邻近极值算法，但更多的也是用梯度法求解最优控制问题，说明梯度法有其优越性，得到了广泛的应用。因梯度算法有很多专门的书刊进行研究，有兴趣的读者可参考。本章讨论解两点边值问题的邻近极值法主要是研究如何利用极大值原理一些特性，使计算最佳弹道更简单一些。

§4.4 再入机动弹道的工程设计法

上面谈到了用优化原理设计再入机动弹道，如果有一个近似的又十分合适的初值，对优化弹道设计十分有利。人们在用优化原理设计再入机动弹道的同时，也在寻找近似的工程设计法，它不需要数值积分，仅需解代数方程，这种方法计算迅速，也便于分析，虽

不是最优的，是次优的也十分有益。

下面以平面最佳再入机动弹道、性能指标为末速最大为例进行讨论。

1. 射程不受限制时，末速最大的工程设计法

为了得到弹道方程的解析解，除了弹道方程式(2-5-23)所作的近似外，还要作如下假设：

① 因为是选择最佳弹道，在最佳弹道附近的弹道簇其形状变化不大，重力的影响是一个系统因素，空气动力与重力相比，在大多数情况下是大得多，重力是一小量，在工程设计时重力可暂不考虑。

② 当马赫数 $M>5$，一般可认为 C_x、C_y 仅是 α 的函数，与马赫数 M、高度 h 无关，当攻角较小时，可近似取

$$C_y = C_y^\alpha \alpha$$

$$C_x = C_{x0} + C_x^\alpha \alpha^2$$

③ 机动射程较短，忽略地球曲率的影响。

关于上述三点近似假设的正确性，可以用不考虑上述三因素得到的结论与考虑上述三因素得到的结论相比较，证明工程设计法得到的结论是可用的。此时简化弹道方程如下：

$$\left.\begin{aligned}\dot{v} &= -\frac{\rho v^2 S}{2m}C_x \\ \dot{\Theta} &= \frac{C_y \rho v S}{2m} \\ \dot{h} &= v\sin\Theta\end{aligned}\right\} \tag{4-4-1}$$

其中 ρ 按近似假设可取 $\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$。

前面讨论最佳弹道的 $\alpha(h)$ 的关系如图 4-18 所示，如果 α 不等于常数或者某些特殊情况，式(4-4-1)得不到解析解。可以设想如果 $\alpha(h)$ 改成由若干段 α 为常数的小段组成，而对每一小段 α 为常数，根据近似假设 C_y，C_x 也为常数，方程式(4-4-1)可以解出。

当 α=常数时

$$v = v_0\exp(-\frac{\Theta-\Theta_0}{k}) \tag{4-4-2}$$

$$\cos\Theta = \cos\Theta_0 + \frac{1}{2}(\frac{C_y^\alpha \alpha S}{m\beta})(\rho-\rho_0) \tag{4-4-3}$$

其中 $k=C_y/C_x$ 称为升阻比，在每小段为常数，此处下标 0 表示初值，ρ_0 不是地面密度，而是初始点处密度，不要混淆。

当 $\alpha=0$、$\Theta=\Theta_0$ 是常数时

$$v = v_0\exp\left[\frac{1}{2}\frac{C_{x0}S}{m\beta}\frac{1}{\sin\Theta}(\rho-\rho_0)\right] \tag{4-4-4}$$

原则上讲可以把 $\alpha(h)$ 分成许多小段，对每一小段如 $\alpha\neq0$ 用式(4-4-2)和式(4-4-3)求解，如 $\alpha=0$，用式(4-4-4)求解，最后把终点速度 v_f 求出来，看 v_f 是哪些参数的函数，再把约束条件加上，通过求有等式约束条件下的函数极值，可以找出一个近似的最佳 $\alpha(h)$，使 v_f 次优。但即使只取五段，要确定的未知数也多达七个，实际上是不好用。现提出一个简便的方法，即每次分两段或三段，仅对两个或三个变量求解，而多用几次，这在计算上就方便多了。

为叙述方便，下面以从某高度 $\Theta=\Theta_0<0$，把弹道拉平，即 $\Theta_f\approx0$ 为例进行讨论。

为了拉平，如果以三段 α=常数的方式进行，其弹道形状以图 4-19 的弹道形状最好。

下面介绍工程设计法选择 $\alpha(h)$ 的具体步骤：

(1)如图 4-19 把弹道分成三段求 v_f 最大的 α_1、α_2、Θ_b，其中 α_1 代表 $a-b$ 段的常数值，$\alpha_1<0$；α_2 代表 $c-f$ 段的常数值，$\alpha_2>0$；$b-c$段的 $\alpha=0$，Θ_b 表示直线段的 Θ 值。

① $\alpha_1=-\alpha_2<0$

令 $\qquad \alpha_2=-\alpha_1=\alpha>0 \qquad k=-k_1=k_2>0$

$$k_1=\frac{C_y(\alpha_1)}{C_x(\alpha_1)}<0 \qquad k_2=\frac{C_y(\alpha_2)}{C_x(\alpha_2)}>0$$

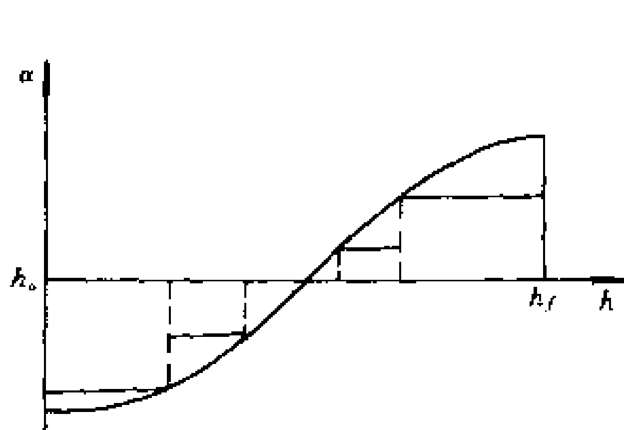


图 4-18 最佳弹道的 $\alpha(h)$

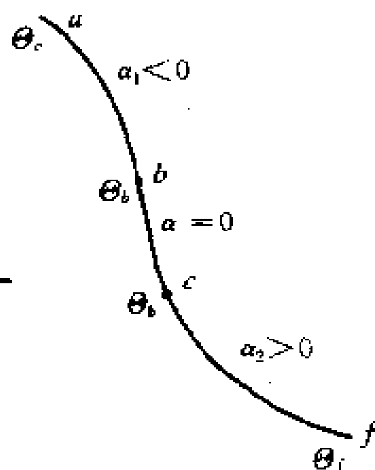


图 4-19 分段时 α 的变化

经推导可以得：

$$v_f = v_0\exp\left[\frac{2\Theta_b - \Theta_0 - \Theta_f}{k} + \frac{1}{2}\frac{C_{x0}S}{m\beta}\frac{1}{\sin\Theta_b}\left(\rho_f - \rho_0 - \frac{\cos\Theta_f + \cos\Theta_0 - 2\cos\Theta_b}{D\alpha}\right)\right] \tag{4-4-5}$$

其中

$$D = \frac{1}{2}\frac{C_y^\alpha S}{m\beta}$$

式(4-4-5)中 Θ_0、h_0、v_0、Θ_f、h_f 一定，则

$$v_f = v(\Theta_b, \alpha) \tag{4-4-6}$$

若要求 v_f 最大，这是二元函数求极值问题，应满足

$$\frac{\partial v_f}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial \Theta_b} = 0$$

解上两式可得 Θ_b、α 应该满足的条件

$$\cos\Theta_b = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1} \tag{4-4-7}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_{x0}}{C_x^\alpha}\left(1 - \frac{\cos\Theta_f + \cos\Theta_0 - 2\cos\Theta_b}{\sin\Theta_b(2\Theta_b - \Theta_0 - \Theta_f)}\right)} \tag{4-4-8}$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = 2/k > 0 \\ a_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_{x0}S}{m\beta}(\rho_f - \rho_0 - \dfrac{\cos\Theta_0 + \cos\Theta_f}{D\alpha}) \\ a_3 = -\dfrac{2}{k}(1 - \dfrac{C_{x0}}{C_x}) < 0 \end{cases}$$

当然求出的 α, Θ_b 应使 $\rho_c - \rho_b > 0, |\Theta_b| > |\Theta_0|$

②$\alpha_1 \neq -\alpha_2, k_1 = \dfrac{C_y(\alpha_1)}{C_x(\alpha_1)} < 0, k_2 = \dfrac{C_y(\alpha_2)}{C_x(\alpha_2)} > 0$

经过推导可得：

$$v_f = v_0 \exp\left[\frac{-(\Theta_f - \Theta_b)}{k_2} - \frac{(\Theta_b - \Theta_0)}{k_1} + \frac{1}{2}\frac{C_{x0}S}{m\beta\cos\Theta_b}(\rho_f - \rho_0 - \frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_b}{D\alpha_2} - \frac{\cos\Theta_b - \cos\Theta_0}{D\alpha_1})\right] \tag{4-4-9}$$

当 $v_0, \Theta_0, h_0, \Theta_f, h_f$ 一定，则

$$v_f = v(\alpha_1, \alpha_2, \Theta_b) \tag{4-4-10}$$

求 v_f 最大，是三元函数求极值问题，应满足：

$$\frac{\partial v_f}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial \Theta_b} = 0$$

解上三式可得 α_1、α_2、Θ_b 应满足的条件

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{C_{x0}}{C_x^\alpha}\left[1 - \frac{\cos\Theta_0 - \cos\Theta_b}{\sin\Theta_b(\Theta_b - \Theta_0)}\right]} \tag{4-4-10}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{C_{x0}}{C_x^\alpha}\left[1 - \frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_b}{\sin\Theta_b(\Theta_b - \Theta_f)}\right]} \tag{4-4-11}$$

$$\cos\Theta_b = \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4p_1p_3}}{2p_1} \tag{4-4-12}$$

其中

$$\begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} \\ p_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_{x0}S}{m\beta}\left[\rho_f - \rho_0 - \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\cos\Theta_f}{\alpha_2} - \dfrac{\cos\Theta_0}{\alpha_1}\right)\right] \\ p_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_{x0}S}{m\beta}\left(\dfrac{1}{D\alpha_2} - \dfrac{1}{D\alpha_1}\right) - \left(\dfrac{1}{k_2} - \dfrac{1}{k_1}\right) \end{cases}$$

当然求出的 $\alpha_1,\alpha_2,\Theta_b$ 应满足 $\rho_c-\rho_b>0$，及 $|\Theta_b|>|\Theta_0|$.

(2)在上述分成三段的假设中，继续对每一小段求使 v_f 最大的 $\alpha(h)$。首先对 $b-c$ 段，原来的 $\Theta=\Theta_c$，$\alpha=0$；而起始条件 $v_0=v_b$，$\Theta_o=\Theta_b$，$h_0=h_b$；终端条件 $v_f=v_c$，$\Theta_f=\Theta_c$，$h_f=h_c$. 可以用第一步的方法继续对这一小段求 α_1、α_2、Θ_b，只是因为 $\Theta_0=\Theta_f$，由式(4-4-10)和式(4-4-11)知此时的 $\alpha_2=-\alpha_1$，故可以利用式(4-4-7)和式(4-4-8)求出所需的 α 及 Θ_b，使 v_f 更大。

(3)对 $a-b$ 段求最优。令 $\alpha_1=\alpha_a$，现在的条件是 h_0,Θ_0,v_0 一定，而 $h_f=h_b,\Theta_f=\Theta_b$，求使 v_f 最大的 $\alpha(h)$。

假设在 $a-b$ 段任取 Θ_1，使 $|\Theta_0|<|\Theta_1|<|\Theta_b|$，原来 Θ_0 到 Θ_1 取 $\alpha=\alpha_a$，而 Θ_1 到 Θ_b 时也取 $\alpha=\alpha_a$，是否有可能 Θ_0 到 Θ_1 取 $\alpha=\alpha_1$，而 Θ_1 到 Θ_b 取 $\alpha=\alpha_2$ 更好一些，这又是求函数极值问题。

此时的 k_1,k_2 均小于零，故

$$v_f = v_0\exp\left[\frac{-(\Theta_1-\Theta_0)}{k_1} + \frac{-(\Theta_f-\Theta_1)}{k_2}\right] = F_1 \tag{4-4-13}$$

而选择的 α_1、α_2 应使

$$\cos\Theta_1 = \cos\Theta_0 + \frac{B}{2}C_y^\alpha\alpha_1(\rho_1 - \rho_0) \tag{4-4-14}$$

$$\cos\Theta_f = \cos\Theta_1 + \frac{B}{2}C_y^\alpha \alpha_2(\rho_f - \rho_1) \tag{4-4-15}$$

其中 $B = S/(m\beta), \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$

令式(4-4-14)和式(4-4-15)中的 ρ_1 相等，可得 α_1、α_2 应满足的约束方程

$$\frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_1}{\alpha_2} + \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0}{\alpha_1} - \frac{B}{2}C_y^\alpha(\rho_f - \rho_0) = F_2 = 0 \tag{4-4-16}$$

问题变成求满足约束条件 $F_2=0$，使 v_f 最大的求函数极值问题。作辅助函数

$$F = F_1 + F_2\lambda \tag{4-4-17}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子，则 α_1、α_2、Θ_1，λ 应满足

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} + \lambda\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} = 0\\
\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} + \lambda\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} = 0\\
\frac{\partial F}{\partial \Theta_1} &= \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1} + \lambda\frac{\partial F_2}{\partial \Theta_1} = 0\\
F_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-4-18}$$

消去拉格朗日乘子，α_1、α_2、Θ_1 应满足的条件是：

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{(\Theta_1 - \Theta_0)(C_x^\alpha\alpha_1^2 - C_{x0})}{(\Theta_f - \Theta_1)(C_x^\alpha\alpha_2^2 - C_{x0})} = \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0}{\cos\Theta_f - \cos\Theta_1} && (4\text{-}4\text{-}19)\\
&\frac{(\Theta_1 - \Theta_0)(C_x^\alpha\alpha_1^2 - C_{x0})}{-\frac{C_{x0} + C_x^\alpha\alpha_2^2}{\alpha_2} + \frac{C_{x0} + C_x^\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1}} = \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_h}{\sin\Theta_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)} && (4\text{-}4\text{-}20)\\
&\frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_1}{\alpha_2} + \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0}{\alpha_1} = \frac{B}{2}C_y^\alpha(\rho_f - \rho_0) && (4\text{-}4\text{-}21)
\end{aligned}\right.$$

解式(4-4-19)、(4-4-20)、(4-4-21)可以得到使 v_f 较大的 α_1、α_2 和 Θ_1，由式(4-4-19)知 $\alpha_1=\alpha_2$ 不是极值情况，因 $\alpha_1=\alpha_2$ 由式(4-4-19)得

$$\frac{\Theta_1-\Theta_0}{\Theta_f-\Theta_1}=\frac{\cos\Theta_1-\cos\Theta_0}{\cos\Theta_f-\cos\Theta} \tag{4-4-22}$$

而式(4-4-22)在一般情况下是不成立的。

(4)对 $c-d$ 段求最优。完全类似 $a-b$ 段，可以找出使 v_f 较大应满足的条件是

$$v_f=v_0\exp\left[\frac{-(\Theta_3-\Theta_0)}{k_3}+\frac{-(\Theta_f-\Theta_3)}{k_4}\right] \tag{4-4-23}$$

此时的 α_3、α_4 大于零，k_3、k_4 也大于零，

$$\frac{(\Theta_3-\Theta_0)(C_x^\alpha\alpha_3^2-C_{x0})}{(\Theta_f-\Theta_3)(C_x^\alpha\alpha_4^2-C_{x0})}=\frac{\cos\Theta_3-\cos\Theta_0}{\cos\Theta_f-\cos\Theta_3} \tag{4-4-24}$$

$$\frac{(\Theta_3-\Theta_0)(C_x^\alpha\alpha_3^2-C_{x0})}{-\frac{C_{x0}+C_x^\alpha\alpha_4^2}{\alpha_4}+\frac{C_{x0}+C_x^\alpha\alpha_3^2}{\alpha_3}}=\frac{\cos\Theta_3-\cos\Theta_0}{\sin\Theta_3\left(\frac{1}{\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_4}\right)} \tag{4-4-25}$$

$$\frac{\cos\Theta_3-\cos\Theta_0}{\alpha_3}+\frac{\cos\Theta_f-\cos\Theta_3}{\alpha_4}=\frac{B}{2}C_y^\alpha(\rho_f-\rho_0) \tag{4-4-26}$$

解方程式(4-4-24)、(4-4-25)、(4-4-26)便可以得所需的 α_3、α_4 和 Θ_3 了。

这样便把整个弹道 $\alpha(h)$ 用七个 $\alpha=$ 常数的折线来代替了，其中一个 $\alpha=0$. 如果某一段高度差较大，还可以再分成二段，甚至可以把每一小段分成两段，就可以把整个弹道 $\alpha(h)$ 用 $\alpha=$ 常数的十五段折线来代替。

将分成三段和七段的 $\alpha(h)$ 画在图 4-20 上，实线表示分成三段，而虚线表示分成七段，结果使 v_f 增加。

这个结果可以定性解释如下：对 $a-b$ 段，原以 $\alpha=\alpha_a$ 向下转弯，为了使弹道更陡一些，应选择 $|\alpha_1|>|\alpha_a|$，而后 $|\alpha_2|<|\alpha_a|$ 飞行，这样速度损失小一些。当然 $|\alpha_1|$ 也不能太大，因为 $|\alpha_1|$ 太大，由 $C_x=C_{x0}+C_x^\alpha\alpha^2$ 知过大的 α_1 会使 C_x 增大很多，速度损失反而会更大。但反过来原来以 $\alpha=\alpha_b$ 向上拉平，为使弹更快的通过大气层，应该

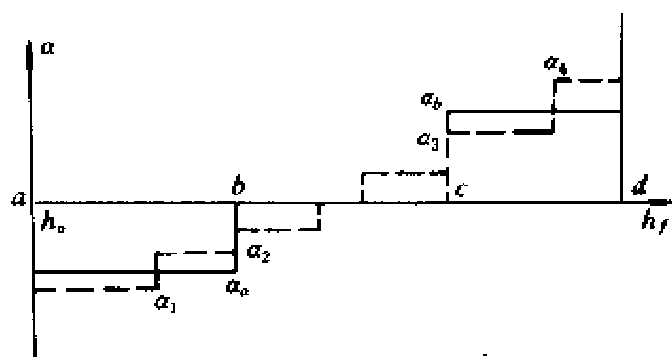


图 4-20 分三段或七段直线段时 $\alpha(h)$

是开始的 $\alpha_3<\alpha_b$，而后的 $\alpha_4>\alpha_b$，以便更快的拉平。对 $b-c$ 段在同样的初始和终端条件下，要弹道陡一些，也应该是开始时 $\alpha<0$ 而后 $\alpha>0$。

(5)关于 Θ_0 的分析

上面的分析是在 $v_0,\Theta_0,h_0,\Theta_f,h_f$ 一定的情况下得到的，如果 Θ_f,Θ_0 本身可以变化，则计算方法有些变化，下面只分析 Θ_0 的变化带来什么影响。为讨论简单只讨论分成三段的情况，且设 v_0 不变化，$\alpha_1=-\alpha_2$。

由式(4-4-5)知 $v_f=v_f(\Theta_0,\alpha,\Theta_b)$，如果 v_f 存在着极值，则 Θ_0^*、α^*、Θ_b^* 应由下式决定

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_f}{\partial\Theta_b}&=0\\\frac{\partial v_f}{\partial\alpha}&=0\\\frac{\partial v_f}{\partial\Theta_0}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}4\text{-}27)$$

但求出的 Θ_0、Θ_b、α 应满足如下条件：

$$\rho_c>\rho_b,|\Theta_b|>|\Theta_0|$$

否则式(4-4-5)不成立。

现在分析式(4-4-5)中第三式 $\partial v_f/\partial\Theta_0$。

$$\frac{\partial v_f}{\partial\Theta_0}=v_0e^{[\cdot]}[\frac{-1}{k}+\frac{1}{2}\frac{C_{x0}S}{m\beta}\frac{1}{\sin\Theta_b}\frac{\sin\Theta_0}{D\alpha}]$$

$$=v_0e^{[\cdot]}[\frac{-C_x}{C_y}+\frac{C_{x0}}{C_y}\frac{\sin\Theta_0}{\sin\Theta_b}] \qquad (4\text{-}4\text{-}28)$$

$e^{[\cdot]}$中方括号表式(4-4-5)中的方括号。

因 $C_x>C_{x0}$, $\sin\Theta_0/\sin\Theta_b<1$，故 $\partial v_f/\partial\Theta_0<0$，即在满足 $\rho_c>\rho_b$，$|\Theta_b|>|\Theta_0|$的条件下，Θ_0 愈小，v_f 愈大，但 Θ_0 为负值，所以$|\Theta_0|$愈大则 v_f 愈大。

但$|\Theta_0|$不能任意大，当$|\Theta_0|=|\Theta_b|$表示不存在 $a-b$ 段，而当求出的$|\Theta_b|\leqslant|\Theta_0|$时表示最优的$|\Theta_b|$比$|\Theta_0|$还小，此时不应该存在 $\alpha_1<0$ 这一段，应该令 $\alpha_1=0$，此时的弹道形状应该如图 4-21 所示。

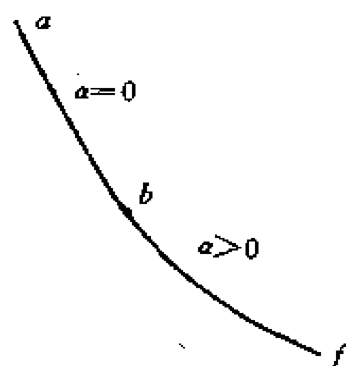


图 4-21　$|\Theta_b|\leqslant|\Theta_0|$时 $\alpha(h)$

此时 v_f 的表达式如下：

$$v_f=v_0\exp[\frac{\Theta_0-\Theta_f}{k}+\frac{C_{x0}S}{2m\beta\sin\Theta_b}\cdot(\rho_f-\rho_0-\frac{\cos\Theta_f-\cos\Theta_0}{D\alpha})] \qquad (4\text{-}4\text{-}29)$$

式(4-4-29)表示$|\Theta_b|<|\Theta_0|$时

$$v_f=v(\alpha,\Theta_0)$$

令$\frac{\partial v_f}{\partial\alpha}=0$，$\frac{\partial v_f}{\partial\Theta_0}=0$ 可得：

$$\alpha^*=\sqrt{\frac{C_{x0}}{C_x^\alpha}(1-\frac{\cos\Theta_f-\cos\Theta_0}{\sin\Theta_0(\Theta_0-\Theta_f)})}=f_1(\Theta_0) \qquad (4\text{-}4\text{-}30)$$

$$\cos\Theta_0^*=\frac{-C_2-\sqrt{C_2^2-4C_1C_3}}{2C_1}=f_2(\alpha) \qquad (4\text{-}4\text{-}31)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_x/C_y \\ C_2 &= \frac{C_{x0}S}{2m\beta}(\rho_f - \rho_0 - \frac{\cos\Theta_f}{D\alpha}) \\ C_3 &= \frac{C_{x0}}{C_y} - \frac{C_x}{C_y} \end{aligned}\right\} \tag{4-4-32}$$

联立解式(4-4-30)和式(4-4-31)可以求出当$|\Theta_0|>|\Theta_b|$时使v_f最大的Θ_0^*、α^*.

当$|\Theta_0|>|\Theta_0^*|$会使v_f下降，所以存在一个$|\Theta|_{0max}$，它是取$\alpha=\alpha_{max}$一直把弹道拉平。

$$\Theta_{0max} = -\arccos[\cos\Theta_f - D\alpha(\rho_f - \rho_0)]$$

剩下的问题是如何确定使$\Theta_0=\Theta_b$时的Θ_0'，实际上只要令式(4-4-7)中$\Theta_b=\Theta_0'$便可以解出Θ_0'

$$\cos\Theta_0' = \cos\Theta_b = \frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_1}$$

可以得

$$\cos\Theta_0' = \frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-4b_1b_3}}{2b_1} = f_3(\alpha) \tag{4-4-33}$$

此时最佳的α^*应满足

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{C_{x0}}{C_x^\alpha}[1-\frac{\cos\Theta_f-\cos\Theta_0}{\sin\Theta_b(\Theta_0-\Theta_f)}]} = f_4(\Theta_0) \tag{4-4-34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 2\frac{C_x}{C_y} - \frac{C_{x0}}{C_y} \\ b_2 &= \frac{C_{x0}S}{2m\beta}(\rho_f - \rho_0) - \frac{\cos\Theta_f C_{x0}}{C_y} \\ b_3 &= -\frac{2}{k}(1-\frac{C_{x0}}{C_x}) \end{aligned}\right\} \tag{4-4-35}$$

联立解式(4-4-33)和(4-4-34)便可以得$\Theta_0=\Theta_b$时使v_f最大

的 α^*.

2. 工程设计法选择的弹道与最佳弹道计算结果的比较

给定如下起始条件：$v_0=5008\text{m/s}$，$\Theta_0=-14°$，$h_0=40000\text{m}$，$\Theta_f=-2°$，$h_f=15000\text{m}$，求 v_f 最大，其余的数据同例一。

下面把各种方法实现上述拉平的计算结果进行比较。

第一方法	以 $\alpha=3°$拉平	$v_f=3675\text{m/s}$
第二方法	以 $\alpha=6°$拉平	$v_f=3743\text{m/s}$
第三方法	以 $\alpha=9°$拉平	$v_f=3728\text{m/s}$
第四方法	以 $\alpha_2=-\alpha_1$ 分三段拉平	$v_f=3788\text{m/s}$
第五方法	以 $\alpha_2\neq-\alpha_1$ 分三段拉平	$v_f=3797\text{m/s}$
第六方法	以第四方法为基础分七段	$v_f=3803\text{m/s}$
第七方法	以第五方法为基础分七段	$v_f=3811\text{m/s}$
第八方法	以第七方法为基础分十五段	$v_f=3814\text{m/s}$

从计算结果看出以 $\alpha=9°=\alpha_{max}$拉平与第七方法相比，$\Delta v=83\text{m/s}$，但第五方法与第七方法相比，$\Delta v=14\text{m/s}$，有改进但不明显，而第八种方法与第七种方法相比 $\Delta v=3\text{m/s}$，优越性不显著，而且没考虑过载约束，如果考虑过载限制，α 过大是不允许。

下面把工程设计法的计算结果与最佳弹道的计算结果进行比较，为了说明工程设计法的可用性，在求解最佳弹道时，也取弹道方程的最简单的模型，即忽略重力影响、忽略空气动力系数随 M 的变化，这是为了在同样的条件下进行比较，而这种近似对求解最佳弹道是完全没有必要的。

同工程设计法取同样的数据，最佳弹道的 $v_{fopt}=3821\text{m/s}$，可见同 $\alpha(h)$分成七段折线的 $v_f=3811\text{m/s}$ 相差很小，而二者的 $\alpha(h)$ 如图 4-22 所示，相差也不多。这充分说明工程设计法选择的弹道接近最佳弹道，是可在工程设计中采用。同时反过来也说明工程设计法的 $\alpha(h)$，而且主要的是 $\alpha(t_0)$是可以作为最佳弹道的初值估计。

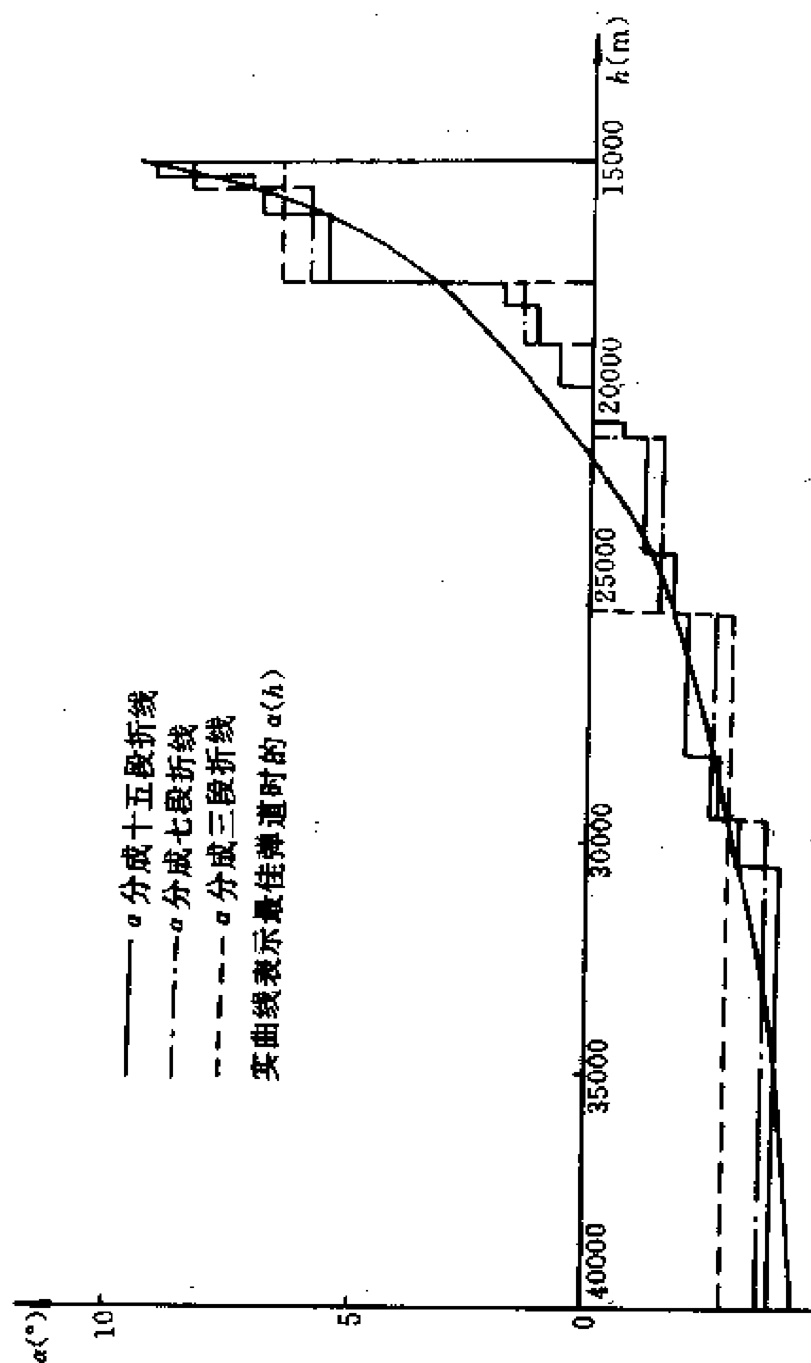


图 4-22 $\Theta_0=-14°$, n_y 不受限制最佳弹道与工程设计法 $\alpha(h)$ 的比较

3. 射程受限制的工程设计法

上一节讨论了拉平段的工程设计法，其射程不受限制。下面讲从 Θ_0 向下为增加射程，在 L_f、Θ_f 一定的情况下求使 v_f 最大的优化弹道。为减小阻力损失，应使弹头在较高的飞行高度飞行一段，而后以较大的负攻角进入。为此把弹道分成两大段进行设计，如图 4-23。图中 a 点为再入开始位置，b 点为攻角转换位置，f 点为落点位置。设：

a 点参数为 v_0, Θ_0, h_0；

b 点参数为 v_1, Θ_1, h_1；

f 点参数为 v_f, Θ_f, h_f.

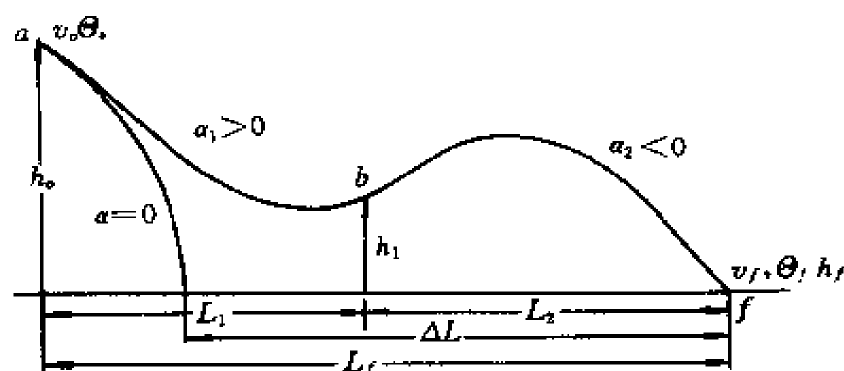


图 4-23 机动弹道示意图

利用公式(4-4-2)可得：

$$v_1 = v_0 \exp[-(\Theta_1 - \Theta_0)/k_1] \tag{4-4-36}$$

$$v_f = v_1 \exp[-(\Theta_f - \Theta_1)/k_2] \tag{4-4-37}$$

故

$$v_f = v_0 \exp\left[\frac{-(\Theta_1 - \Theta_0)}{k_1} - \frac{(\Theta_f - \Theta_1)}{k_2}\right] \tag{4-4-38}$$

由式(4-4-3)知

$$\cos\Theta_1 = \cos\Theta_0 + \frac{C_y^\alpha \alpha_1 S}{2m\beta}(\rho_1 - \rho_0)$$

$$\cos\Theta_f = \cos\Theta_1 + \frac{C_y^{\alpha}\alpha_2 S}{2m\beta}(\rho_f - \rho_1)$$

消去 ρ_1 可得

$$\frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_1}{\alpha_2} + \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0}{\alpha_1} - \frac{B}{2}C_y^{\alpha}(\rho_f - \rho_0) = 0 \tag{4-4-39}$$

两段的总射程为

$$L_f = L_1 + L_2 \tag{4-4-40}$$

L_1、L_2 可由式(3-3-19)和(3-3-20)求出。

令

$$C_x = C_{x0} + C_x^{\alpha}\alpha^2,$$

由式(4-4-38)、(4-4-39)和(4-4-40)可得：

$$F_1 = v_f = v_0\exp\left[\frac{-(\Theta_1 - \Theta_0)}{k_1} - \frac{(\Theta_f - \Theta_1)}{k_2}\right]$$

$$F_2 = L_1 + L_2 - L_f = 0$$

$$F_3 = \frac{\cos\Theta_f - \cos\Theta_1}{\alpha_2} + \frac{\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0}{\alpha_1} - \frac{B}{2}C_y^{\alpha}(\rho_f - \rho_0) = 0$$

问题化为求条件极值问题。利用多元函数求极值的方法作

$$F = F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = F(\alpha_1, \alpha_2, \Theta_1) = 0$$

λ_2、λ_3 为拉格朗日乘子

故应有

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial \Theta_1} = 0$$

故得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}\lambda_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}\lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}\lambda_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_2}\lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_1}\lambda_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \Theta_1}\lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-4-41}$$

由前两式可得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}\lambda_2+\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}\lambda_3&=-\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}\\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}\lambda_2+\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_2}\lambda_3&=-\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2}\end{aligned}\right\}\tag{4-4-42}$$

解方程组得：

$$\lambda_2=\frac{B}{A}\qquad \lambda_3=\frac{C}{A}$$

其中

$$A=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \alpha_2}\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}\\ -\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \alpha_2}\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{-\partial F_1}{\partial \alpha_1}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} & \dfrac{-\partial F_1}{\partial \alpha_2}\end{vmatrix}$$

故得一组方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1}+\frac{\partial F_2}{\partial \Theta_1}\frac{B}{A}+\frac{\partial F_3}{\partial \Theta_1}\frac{C}{A}=0=f_1\\ &F_2=0=f_2\\ &F_3=0=f_3\end{aligned}\right\}\tag{4-4-43}$$

解上述方程可得 α_1、α_2、Θ_1 值。

其中偏导数

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}=\frac{-(\cos\Theta_1-\cos\Theta_0)}{\alpha_1^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_2}=-\frac{\cos\Theta_f-\cos\Theta_1}{\alpha_2^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \Theta_1}=\frac{\sin\Theta_1}{\alpha_2}-\frac{\sin\Theta_1}{\alpha_1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}=v_0\exp\left[-\frac{\Theta_1-\Theta_0}{k_1}-\frac{\Theta_f-\Theta_1}{k_2}\right]\left[-\frac{\Theta_1-\Theta_0}{C_y^\alpha}\frac{C_x^\alpha\alpha_1^2-C_{x0}}{\alpha_1^2}\right]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2}=v_0\exp\left[-\frac{\Theta_1-\Theta_0}{k_1}-\frac{\Theta_f-\Theta_1}{k_2}\right]\left[-\frac{\Theta_f-\Theta_1}{C_y^\alpha}\frac{C_x^\alpha\alpha_2^2-C_{x0}}{\alpha_2^2}\right]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1}=v_0\exp\left[-\frac{\Theta_1-\Theta_0}{k_1}-\frac{\Theta_f-\Theta_1}{k_2}\right]\left[-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right]$$

对于$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}$、$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}$、$\frac{\partial F_2}{\partial \Theta_1}$，由于解析式的形式复杂，可用求差法解。

附录 A 控制变量为 α、β、ν 时的偏导数

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial v}=-C_x\frac{qS}{m}\left(\frac{2}{v}+\frac{C_x^v}{C_x}\right),\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_T}=-g\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \sigma_T}=0,\frac{\partial f_1}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi}=0,\frac{\partial f_1}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial r}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial h}=\frac{2g}{r}\sin\theta_T-C_x\frac{qS}{m}\left(\beta-\frac{C_x^h}{C_x}\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial v}=\frac{C_y\rho vS}{2m}\left(\frac{1}{v}+\frac{C_y^v}{C_y}\right)\cos\nu+\left(\frac{g}{v^2}+\frac{1}{r}\right)\cos\theta_T$$
$$-\frac{C_z\rho vS}{2m}\left(\frac{1}{v}-\frac{C_z^v}{C_z}\right)\sin\nu$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \theta_T}=\left(\frac{g}{v}+\frac{v}{r}\right)\sin\theta_T,\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \sigma_T}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \phi}=0,\frac{\partial f_2}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial r}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial h}=\left[C_y\frac{\rho vS}{2m}\left(\beta+\frac{C_y^h}{C_y}\right)\right]\cos\nu$$
$$+\frac{v\cos\theta_T}{r^2}-\frac{2g}{r}\cos\theta_T-\left[\frac{C_z\rho vS}{2m}\left(\beta+\frac{C_z^h}{C_z}\right)\right]\sin\nu$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial v}=-\left[\frac{C_y\rho vS}{2m\cos\theta_T}\left(\frac{1}{v}+\frac{C_y^v}{C_y}\right)\right]\sin\nu+\frac{\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r}$$

$$-\frac{C_y \rho v S}{2m\cos\theta_T}\left(\frac{1}{v}+\frac{C_z^v}{C_z}\right)\cos\nu$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \theta_T}=-C_y\frac{\rho v S}{2m}\sin\nu\frac{\sin\theta_T}{\cos^2\theta_T}+\frac{v\mathrm{tg}\phi\sin\sigma_T}{r}(-\sin\theta_T)$$

$$-C_z\frac{\rho v S}{2m}\cos\nu\frac{\sin\theta_T}{\cos^2\theta_T}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \sigma_T}=\frac{v\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T}{r}\cos\sigma_T$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \phi}=\frac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r}\frac{1}{\cos^2\phi} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial r}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial h}=-C_y\frac{\rho v S}{2m\cos\theta_T}\left(\beta+\frac{C_y^h}{C_y}\right)\sin\nu$$

$$-\frac{v\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r^2}-C_z\frac{\rho v S}{2m\cos\theta_T}\left(\beta+\frac{C_z^h}{C_z}\right)\cos\nu$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial v}=\frac{\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r} \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta_T}=\frac{-v\sin\theta_T\cos\sigma_T}{r}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \sigma_T}=-\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r} \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r}=\frac{-v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r^2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v}=-\frac{\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \theta_T}=\frac{v\sin\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \sigma_T}=\frac{-v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r\cos\phi} \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \phi}=\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T\sin\phi}{r\cos^2\phi}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial r}=\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r^2\cos^2\phi}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial v}=\sin\theta_T \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_T}=v\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \sigma_T}=0 \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \phi}=0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}=0$$

附录 B 控制变量为 η、ϕ' 时的偏导数

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial v}=-C_x\frac{qS}{m}\left(\frac{2}{v}+\frac{C_x^v}{C_x}\right),\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_T}=-g\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \sigma_T}=0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi}=0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial r}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial h}=\frac{2g}{r}\sin\theta_T-C_x\frac{qS}{m}\left(\beta-\frac{C_x^h}{C_x}\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial v}=\frac{C_y\rho vS}{2m}\left(\frac{1}{v}+\frac{C_y^v}{C_y}\right)\cos\phi'+\left(\frac{g}{v^2}+\frac{1}{r}\right)\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \theta_T}=\left(\frac{g}{v}+\frac{v}{r}\right)\sin\theta_T,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \sigma_T}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \phi}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial r}=\frac{\partial \dot{\theta}_T}{\partial h}=C_y\frac{\rho vS}{2m}\left(\beta+\frac{C_y^h}{C_y}\right)\cos\phi'+\frac{v\cos\theta_T}{r^2}-\frac{2g}{r}\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial v}=-\frac{C_y\rho vS}{2m\cos\theta_T}\left(\frac{1}{v}+\frac{C_y^v}{C_y}\right)\sin\phi'+\frac{\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \theta_T}=-C_y\frac{qS}{mv}\sin\phi'\frac{\sin\theta_T}{\cos^2\theta_T}+\frac{v\,\mathrm{tg}\phi\sin\sigma_T}{r}(-\sin\theta_T)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \sigma_T}=\frac{v\,\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T}{r}\cos\sigma_T$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \phi}=\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r}\frac{1}{\cos^2\phi}\qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial r}=\frac{\partial \dot{\sigma}_T}{\partial h}=-C_y\frac{\rho vS}{2m\cos\theta_T}\left(\beta+\frac{C_y^h}{C_y}\right)\sin\phi'-\frac{v\,\mathrm{tg}\phi\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial v}=\frac{\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r}\qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta_T}=\frac{-v\sin\theta_T\cos\sigma_T}{r}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \sigma_T}=\frac{-v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r} \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r}=\frac{-v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r^2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v}=\frac{-\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \theta_T}=\frac{v\sin\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \sigma_T}=\frac{-v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r\cos\phi} \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \phi}=\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T\sin\phi}{r\cos^2\phi}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_5}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial r}=\frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r^2\cos^2\phi}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial v}=\sin\theta_T \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_2}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_T}=v\cos\theta_T$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \sigma_T}=0 \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_4}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \phi}=0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial f_6}{\partial x_6}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}=0$$

第五章 机动弹头的弹道设计和制导方法

§5.1 概 述

§5.1.1 弹头概述

弹头是弹道导弹的有效载荷，用于毁伤作战目标。当然也是其它导弹的有效载荷。本章只讨论弹道导弹的弹头。

弹头的质量、威力、命中精度和突防能力等都是弹道导弹的主要战术技术指标。减小弹头的质量是提高导弹地面机动能力的关键，足够的突防能力是弹头突破防方拦截，保证到达目标上空，进行作战的前提。弹头的威力、命中精度决定了导弹的打击能力。

弹头是导弹武器系统的重要组成部分，它在整个导弹系统中占有重要地位。

1. 弹头的分类

弹头可以按多种方法分类。

(1)按战斗部装药分类

弹头按装药种类不同可分为常规弹头、核弹头和特种弹头。常规弹头主要有爆破弹头、杀伤弹头、聚能破甲弹头等。核弹头包括原子弹头、氢弹头和中子弹头等。特种弹头是装填特种装填物的各类弹头的总称，包括生物弹头、燃烧弹头、发烟弹头和干扰弹头等。

(2)按一枚导弹运载的弹头数量分类

可分为单弹头和多弹头。多弹头又分为集束式、分导式和全导式三种。

集束式多弹头是一种简易的多弹头，它在母舱内装多个子弹头，在达到预定弹道参数后，一次集束释放所有子弹头，用于攻击一个目标。

分导式多弹头的母舱增加了分离释放机构，能根据需要分别释放母舱中的子弹头，使其攻击一个或多个目标，各弹头落点之间最大距离可达数百公里。

全导式多弹头不仅具有分导能力，而且每个弹头可机动飞行，它们都是机动弹头。

(3)按飞行轨道分类

分为惯性弹头和机动弹头。

惯性弹头又称无控弹头，它与弹体分离后，依赖它从弹体获得的能量作惯性飞行，飞行轨道主要取决于分离点的位置、速度大小和弹道倾角。

机动弹头在与弹体分离后，可根据需要改变飞行弹道。通过改变飞行弹道来躲避敌方拦截的机动弹头叫躲避型机动弹头；不仅改变飞行轨道，而且通过末制导装置来提高命中精度的机动弹头叫精确型机动弹头或高级机动弹头。

也可以把在大气层外通过发动机推力进行变轨的弹头称为高空机动弹头，而把进入大气层后利用空气动力变轨的弹头称为再入机动弹头。

再入机动弹头技术是在惯性弹头技术基础上发展起来的，但再入机动弹头有其新问题、新特点。本章主要研究再入机动弹头带来的新问题。

2. 弹头的特点

(1)弹头再入环境恶劣

弹道导弹弹头以高速进入大气层后，造成高温、高压环境；噪声、振动、冲击、过载都十分严重。总的看，热和力环境比主动段严重几倍乃至百倍，这样的环境产生许多极其复杂的物理现象，如空

气电离产生等离子鞘套,表面防热材料烧蚀后产生沟槽花纹等,弄清这些现象对弹头的影响与效应是完成弹头设计的前提。弹头外部气动加热造成摄氏几千度的高温,如何使弹头的防热结构质量小并保证弹头不被烧毁,一直是弹头设计中的重大技术问题。

(2)弹头系统难以在地面进行综合考核

由于再入段的恶劣环境,要求地面模拟参数的范围是:马赫数10～25,雷诺数10^7～10^9,最大过载50g,气动噪声达160dB……等。这些参数的单项模拟有的都很不容易,全面在地面模拟则完全不可能,只有通过飞行试验获取弹头飞行环境参数和响应参数。

由于导弹的飞行试验费用昂贵,发展廉价的试验运载火箭或采用已退役的导弹作新研制弹头或弹头缩比模型的飞行试验,是弹头技术发展的重要技术途径。

(3)弹头结构是多层复合结构

弹头结构需要完成的功能多,如承力、防热、隔热、抗核加固、吸波隐身等。因此,其多为多层复合结构。即采用多功能复合材料,一种材料也难以同时完成上述各种功能,因此弹头结构必然是由多种材料互相匹配构成的复合结构。复合受力、热力耦合、外形变化、高温高压密封和局部防热等在弹头设计中成为重要问题。

(4)攻防对抗使弹头技术复杂化

弹道导弹一般都是进攻性武器,由于反导系统的出现和发展,弹头在飞行过程中可能遭拦截,常用的拦截方法是:利用预警雷达系统预测来袭弹头的飞行轨道,然后发射反导弹导弹将来袭弹头在到达目标之前击毁。为此弹头设计必须要收集、分析敌方防御系统的性能,进行攻防仿真,并采取多种反识别和反拦截措施,以提高弹头的突防概率。

反识别就是设法欺骗防御方的预警探测器,使之不能发现或尽可能推迟发现的时间,使拦截器找不到目标或尽可能削弱其反应能力,从而实现进攻弹头的突防。弹头的隐身技术、干扰技术、诱

饵技术等都是弹头的反识别技术。

反拦截的重要方面是对弹头进行加固设计,使弹头能够抵抗反导弹导弹拦截造成的核爆炸环境以及其它拦截武器产生的环境(如高能粒子束、激光等)。反拦截的另一手段是进行机动躲避,在弹头上装目标识别器,进行机动躲避飞行,避免遭受动能武器等拦截器的攻击。采用多个弹头同时攻击一个目标,以饱和反导弹导弹的拦截能力,也是为了提高进攻弹头的突防能力。

(5)弹头设计制约条件多,协调面广

弹头既是弹道导弹的运载对象,同时它本身又是内装药的运载器。要求同时提高导弹射程和装药威力是弹头设计的主要矛盾之一。

从整个导弹武器系统的角度看,弹头是一分系统。弹头的性能要满足整个导弹武器系统的战术技术指标要求,特别是射程、威力和精度三大指标要求。威力指标要求足够当量的核装置,这要占去很大一部分弹头质量和内腔空间,在一定的核技术水平条件下,要提高威力就要增加弹头的质量和体积,而弹头的总质量、总长度和最大直径是导弹总体严格限制的,它直接影响整个导弹武器系统的主要技术性能。例如,对洲际射程的战略导弹,弹头质量每增加1kg,导弹射程缩短10km左右,如射程不变,则起飞质量要增加40~50kg。因此弹头设计不仅要和全弹总体指标协调,而且要和核装置的设计密切协调,不仅受导弹总体设计指标的限制,而且和核装置的质量、体积存在很大的矛盾,妥善解决弹头与运载火箭、核装置之间的矛盾,是制定弹头总体方案的基础,是弹头设计的技术关键。

3. 弹头的组成及功能

最简单的弹头由弹头壳体和核装置及其引爆控制系统组成。随着弹头功能的增加,系统越来越多,如姿态控制系统、突防系统。而高级机动弹头还有中制导或末制导系统、动力系统等许多复杂

系统，它本身就像一个小导弹。

弹头如文献[17]所述可由如下几部分组成：

(1)防热及承载结构壳体；

(2)核装置(或炸药)及其引爆系统；

(3)控制系统；

弹头控制系统的任务如下：

①使弹头突破敌方防御系统

由于弹头和运载火箭分离时的残余角速度，弹头在真空段飞行时可能发生翻滚运动，敌方雷达能较早地识别出弹头的运动状态。弹头姿态控制系统(简称弹头姿控系统)控制弹头在中段以一定的姿态飞行，可以有效地降低雷达反射截面积和起伏特性，缩短敌方的有效探测距离。

为了迷惑敌方，提高突防能力，弹头在中段飞行时，将释放几批轻、重诱饵，这些诱饵分布在弹头周围，对敌方探测雷达形成具有一定范围的威胁管道，而威胁管道的形成有赖于弹头在释放诱饵时的姿态和诱饵相对于弹头的速度。机动弹头对弹头控制系统有更高的要求。

②确保弹头的可靠再入

弹头姿控系统能确保小攻角再入，使弹头免受大的法向过载，可提供准确的轴向过载，作为引爆控制系统的引爆控制参数，这样使弹头既减小了质量，简化了结构，又保证了可靠再入。

弹头再入大气层后发生的滚转异常现象也会使弹头法向过载剧增，甚至使弹头解体。为了减免滚转异常现象的出现，可以采用弹头滚动速度控制系统(简称滚控系统)，把弹头再入飞行中的滚动角速度控制在一定的范围内。

③提高命中精度

减少再入散布是提高命中精度的途径之一。弹头的再入散布主要由配平角引起，而且随着射程的增加而增加。姿控慢旋系统保

证弹头以小攻角慢旋再入，使配平角引起的散布减少。随着导弹命中精度的提高，要求发展中段制导与控制、图像匹配末制导系统和综合引爆系统以提高对目标的杀伤效果。

(4)突防系统

4. 弹头技术的发展

导弹的发展史主要围绕着提高导弹攻击能力、突防能力和生存能力而展开。

(1)提高导弹的攻击能力

提高导弹的攻击能力，主要是提高弹头的比威力和命中精度。导弹的作战效果既要看弹头的威力(当量)，更要看命中精度。提高命中精度包括提高主动段制导精度，减小弹头再入散布和发展中制导、末制导技术。

(2)提高导弹的突防能力

提高导弹的突防能力主要表现在提高弹头空中生存能力，即要求弹头强突防、全天候。

由于反弹道导弹防御体系的出现，弹头的突防成为重要的课题。为了提高突防概率，必须提高弹头的再入性能，特别是提高落速，这就要求在设计弹头时成倍提高其质阻比，使弹头外形向细长体方向发展。

多弹头和机动弹头也是随着提高导弹的突防能力而发展起来。而且要考虑天气对弹头再入性能的影响。

(3)提高导弹的地面生存能力

要求导弹实现固定发射到机动发射的转变，提高导弹的机动能力必然要求导弹小型化，而弹头小型化是导弹小型化的关键。

5. 弹头的发展趋势

弹头技术的发展趋势是小型化、强突防、高精度、全天候和机动飞行。

(1)小型化

包括有效载荷的小型化，减小弹头壳体单位面积的质量，弹上仪器设备的小型化。

(2)强突防

它包括反识别(即发展隐身技术、干扰技术和诱饵欺骗技术)、反拦截(即全面均衡的抗核加固)和攻防对策的仿真研究。

(3)高精度

弹头的命中精度首先取决于导弹制导系统的精度，在导弹制导技术充分发展的同时，采取各种措施减小再入散布，发展中段制导和末段制导都是提高命中精度的重要途径。

减小弹头滚转异常概率，以减小再入散布。主要方法是研制高性能端头，严格控制质心偏移，选择适当静稳定度，研究防热套新的加工工艺等。

末制导是在弹头上安装终端敏感系统，用以敏感再入段某特征区的信息，通过匹配计算，与弹头上原储存信息比较，给出弹头偏离预定弹道和目标的误差信息，送至惯导系统以修正再入轨道，可大幅度提高精度。

(4)全天候

作战中必然遇到恶劣气候的再入环境，恶劣环境会严重影响命中精度，甚至对弹头的生存能力构成威胁。为此应加强这方面的研究，形成全天候的弹头。

(5)机动飞行

弹头技术的发展已经可以实现一枚导弹运载10个以上的精确机动弹头，其命中精度呈数量级的提高。

机动飞行主要依靠气动力改变惯性飞行的弹道，因此复杂外形的气动力研究，是机动弹头设计特别是控制系统设计的前提条件。

由于外形复杂和弹头表面三维台阶(见图5-1)，缝隙、活动部位的出现给机动弹头的气动热和防热研究、设计提出了许多新课

题。

再入机动控制技术包括小型控制系统的设计研究、灵活而能多次启动使用的能源系统研究和末制导技术。

§5.1.2 机动弹头的特点及组成

从前面的叙述可以看出：弹头的发展趋势，无论从强突防、高精度还是机动飞行，机动弹头是弹头的一个极重要的发展方向。

1. 机动弹头的特点

机动弹头带有控制和动力系统（或气动升力面），能机动飞行即改变弹头的惯性弹道，沿一条变化的弹道飞向目标。

躲避型机动弹头主要目的是提高突防能力，弹头再入至某一高度（此时速度较高），突然改变其飞行方向来躲避反导导弹的拦截。显然，这种机动弹头有一定的局限性，因机动能力有一定的限度，反导系统的计算机仍能预测到弹头可能的机动弹道，但这种可能的机动弹道是一个不确定的范围，这就要用足够的拦截导弹发送到这个不确定范围内，才可能摧毁机动弹头。所以发展躲避型机动弹头可消耗敌方防御体系较多数量的拦截导弹，提高进攻方弹头的突防概率。从这点出发，躲避型机动弹头应尽可能设计得再入速度高、机动能力强，具有一定的抗核加固能力。

高级机动弹头除装有惯性制导系统外还有末制导装置，这种装置要求弹头再入至某一高度时减速，并保持一定的飞行姿态，利用地图匹配或地形匹配系统实现精确命中目标。由于依靠末制导来修正飞行弹道直到命中目标，精度很高，是打击点目标的有力武器。

2. 机动弹头的组成及其功能

高级机动弹头一般由弹头壳体、核装置及其引爆系统、组合式制导系统（包括惯性制导和末制导装置等）、动力系统（包括姿态控制发动机、液压伺服系统、配平翼执行机构等）和能源系统等组成，

如图 5-1 所示

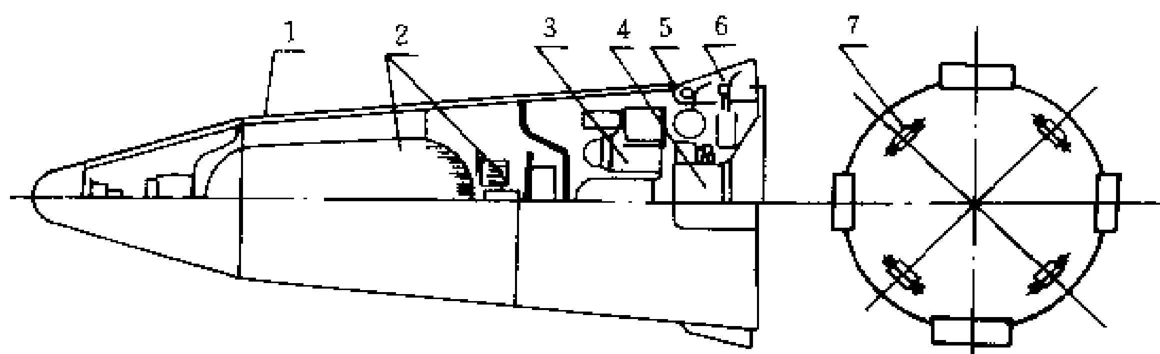


图 5-1　机动弹头基本组成示意图

1—弹头壳体；2—核装置及其引爆控制系统；3—组合式制导系统；
4—能源系统；5—动力系统；6—配平翼及其执行机构；7—姿态发动机系统。

壳体、核装置及其引爆系统与惯性弹头相同。仅介绍不同部分。

(1)组合式制导系统

①惯性制导系统

惯性制导系统可采用捷联或平台系统。系统从起飞开始工作，一直控制到命中目标，在再入段与末制导装置组合成组合式制导系统。

它的功能是为弹头控制提供惯性基准，实现全程的惯性制导，确保弹头三轴姿态的稳定，并将机动飞行的规律装订在计算机内，控制弹头按预定的程序飞行。

②末制导装置

末制导装置有雷达地形或地图匹配装置，它由雷达、相关器和计算机组成。装置中可预先输入目标区的地形地貌参数或地图，将雷达测到的实际地形参数在相关器内与预先储存的数据相比较并计算，就可以确定弹头相对于地面基准系统的位置。

(2)动力系统

机动弹头的动力系统由如下部分组成。

①姿态控制发动机 ②配平翼执行机构 ③液压伺服机构。

(3)能源系统

3. 战术导弹机动弹头举例

机动弹头按射程远近可分为战略导弹机动弹头和战术导弹机动弹头。前者仍在研制阶段，提出了不同的控制方案：控制翼方案、弯头加配重块控制、舵面控制等。试验结果虽有一定的突防能力，但作战性能差、尺寸和重量都太大、精度也低，不能满足战略导弹的作战要求，改进型正在研究试验中。

战术导弹机动弹头，美国研究成功了潘兴Ⅱ导弹系统。下面对其弹头、末段弹道和末制导系统作简要介绍。

(1)潘兴Ⅱ弹头的组成

潘兴Ⅱ弹头呈两级锥形，长4.2m，底部直径1m，如图5-2所示。

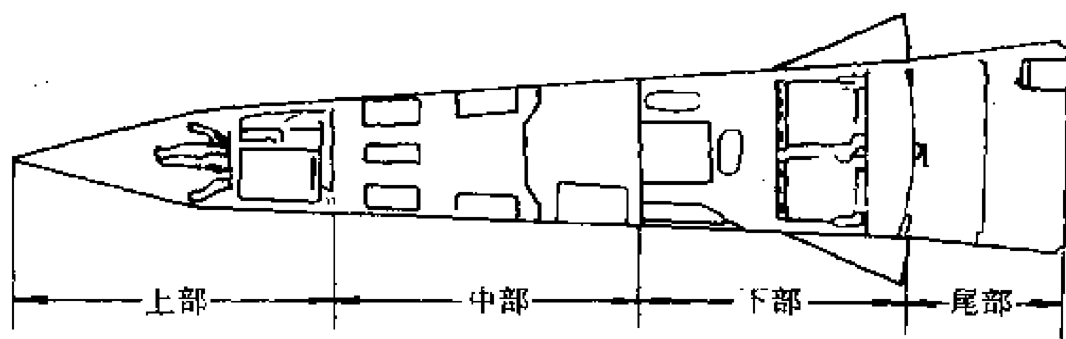


图5-2 潘兴Ⅱ弹头结构图

它由四部分组成，上部为雷达天线、撞击引信及整流罩；中部为战斗部，壳体内装有常规战斗部76枚子弹，用于攻击机场跑道等；下部是制导和控制部分，内装惯导装置、数字相关计算机、液压系统执行机构、燃气能源系统、反作用冷气姿控系统、分离机构等，

在裙部外面装有四个三角形空气舵；尾部是分离环适配器和过渡段。

(2)潘兴Ⅱ导弹的发射与弹道

潘兴Ⅱ导弹在起飞前必须作好诸元准备，包括飞行程序、关机参数、图像相关匹配的原图信息等应装入计算机内。潘兴Ⅱ弹道比一般弹道导弹弹道要复杂，导弹起飞后，制导和控制系统保证潘兴Ⅱ导弹稳定飞行到第二级发动机关机，在第一级和第二级之间有一段滑行段，在弹头与弹体分离后，弹头由冷气反作用姿控系统对姿态进行控制，弹高点达 300km 左右。再入大气层后由空气舵控制姿态。其弹道示意图如图 5-3。潘兴Ⅱ弹头的末段弹道相当复杂，当弹头到达目标上空 40km 左右高度时，开始将弹道拉起，在

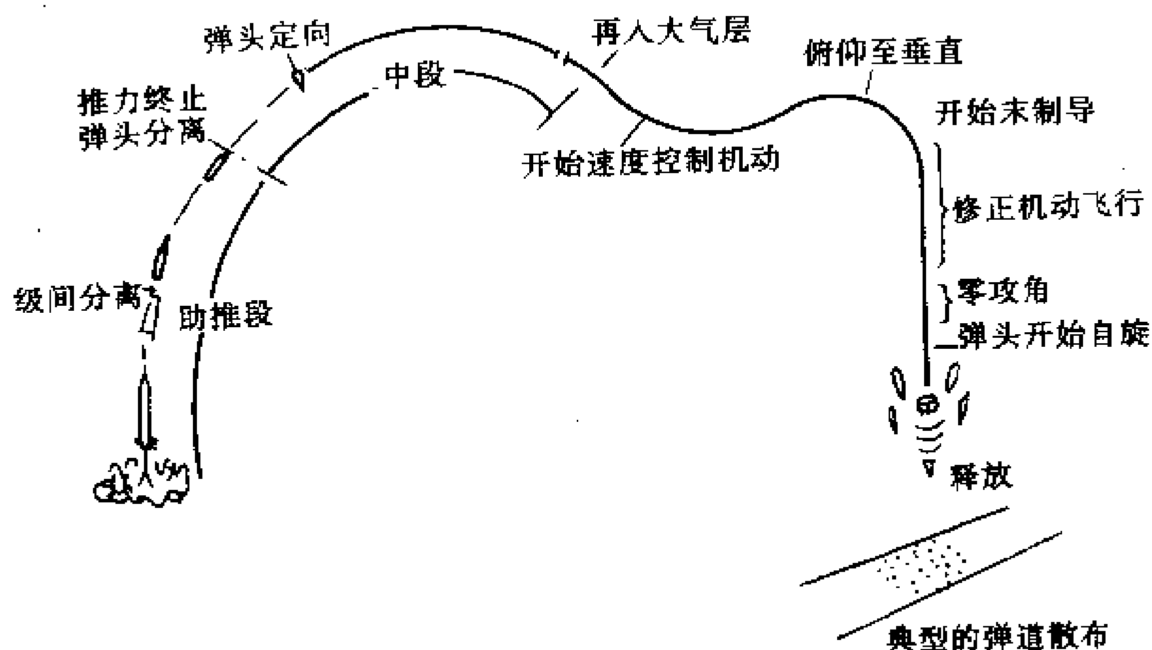


图 5-3　潘兴Ⅱ常规子母弹飞行程序

惯性制导系统控制下进行减速控制，又称攻角控制。平飞以后进行所谓的锥形运动进行减速，同时对速度方向进行控制，使弹道下拉，接近垂直，并用锥形运动进一步减慢弹头的速度，使之满足雷

达相关器工作的要求，如图 5-3。根据要求弹头撞击地面的速度为 410m/s～1070m/s，因此在距地面 900m 之前根据需要采用锥形运动减速。雷达区域相关器在马赫数 M 小于 5 开始工作，这个雷达是全天候 J 波段雷达，天线作圆形扫描。由雷达得到的实时图像与预储的目标图像进行比较，经计算处理，导引弹头飞向目标，最后命中。

当导弹达到 15km 高度，雷达有足够功率测高时，天线向下进行测距，进行几次高度校正，然后雷达开始对地面敏感图像，天线以 2 转/秒的速度绕垂直稳定轴旋转扫描，一转用于摄取图像、景像匹配处理，另一转用于确定高度进行校正。天线扫描范围在 4.5km 高时为 $35km^2$。计算机将经过高度校正的雷达图像回波信号转换成数字图像，经相关器信息匹配处理后，提供相对目标的位置修正指令，导引弹头飞向目标，一般要修正 3 次以上，直到距地面 900m 高度为止。然后靠旋转抛撒子弹。

综合起来，潘兴Ⅱ导弹的弹头有如下几个特点：

①采用了惯性＋地图匹配的末制导系统，利用雷达区域相关器和高度表的测量信息，修正惯性导航的位置误差。

②目标虽是固定的，但弹道是非惯性的，要进行机动飞行。机动飞行的导引规律采用了最佳状态反馈导引规律，该导引规律既保证高的命中精度，又为雷达高度表和雷达区域相关器以及弹头引信的正常工作创造了良好的条件(即接近垂直)。同时保证再入过程中速度损失较小，以利于对落速进行控制。

③根据不同的弹头，对落速可进行控制，潘兴Ⅱ弹头可在 410m/s～1070m/s 的速度范围内进行控制。

总之，再入机动弹头为了使雷达和区域相关器正常工作，必须减小弹头的飞行速度，否则弹头将被严重的气动加热所产生的等离子体所包围，信号无法传输。而为了末制导系统正常工作，需要再入机动弹头飞行末端的速度方向，基本上与地面垂直，所以速度

方向也要进行控制。

另一方向，常规武器弹头可细分穿地弹、空爆弹和地爆弹，不同的弹头为了达到最佳的杀伤效果，不仅对速度方向有要求，而且对落速大小也有不同的要求。

本章讨论以提高精度为主，有末制导系统的再入机动弹头的速度方向和大小的控制问题。

再入机动弹头，一般不用大推力的发动机来减速，仅装有姿态控制系统用的小发动机，减速只能用增加空气阻力的方法进行。用空气动力来减速的方案有许多种，本章只讨论用攻角来控制减速的方法。

§5.2 再入机动弹头速度方向的控制

躲避型机动弹头是按程序机动飞行，当有干扰使落点偏差变化时，它不能再进行修正。而以提高精度为主的高级机动弹头，它要同时完成两个任务：既要命中目标又要使落速方向满足设计要求。因为总是存在着干扰，要采用闭路控制，以便修正由干扰引起的误差。

对落地速度方向无要求时，可用一般的比例导引方法将弹头导引到目标，当对落速方向有要求时，用一般的比例导引方法是不行的。下面将用优化原理解决此问题。

§5.2.1 坐标系及其相互间的关系

为描述再入机动弹头的运动，定义几个坐标系并找出坐标系间的相互关系。

1. 坐标系

(1)目标坐标系 o_0-xyz，简记为 $\boldsymbol{O}$

该坐标系的原点在目标处，取目标处的地理坐标系为目标坐

标系 o_o-xyz。因为再入机动弹头飞行时间短，可以认为地球为不旋转的圆球，认为目标为固定点，则该坐标系为惯性系。o_oy 在目标与地球球心的连线上，指向目标为正，o_ox 在当地水平面内指向弹头为正，o_oz 与 o_ox 和 o_oy 构成右手直角坐标系。

(2)视线坐标系 $o_o-\xi\eta\zeta$，简记为 S

该坐标系的原点也在目标处，$o_o\xi$ 轴由目标指向机动弹头质心 o_1，$o_o\zeta$ 轴在目标当地水平面内，即在 o_o-xz 平面内，且与 $o_o\xi$ 轴垂直，向右为正，$o_o\eta$ 轴与 $o_o\xi$、$o_o\zeta$ 轴组成右手直角坐标系。该坐标系也称导引坐标系。

(3)地心坐标系 o_E-XYZ，简记 E

同前面定义的坐标系相同，只是 O_EX_E 在赤道平面内指向过目标的子午线与赤道平面的交点。

讨论中还用到半速度坐标系、速度坐标系、地理坐标系和弹体坐标系，其定义和简记的符号分别为 H、V、T 和 B。

2. 坐标系间的方向余弦阵

(1)目标坐标系与视线坐标系之间的方向余弦阵 S_O

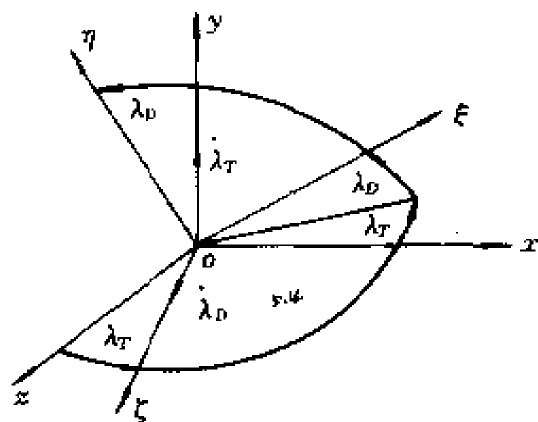


图 5-4 导引坐标系和目标坐标系的关系

如图 5-4 定义视线角 λ_D 和 λ_T，λ_T 是视线 $o_o\xi$ 在地平面上的投影与 o_ox 之间的夹角，也称方位角，λ_D 是视线 $o_o\xi$ 与地平面之间的

夹角，也称高低角。视线坐标系是目标坐标系按 2-3-1 的次序转动两次得到的坐标系，故

$$\begin{bmatrix} o_o\xi \\ o_o\eta \\ o_o\zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{S_O} \begin{bmatrix} o_o x \\ o_o y \\ o_o z \end{bmatrix} \tag{5-2-1}$$

$$\boldsymbol{S_O} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_D\cos\lambda_T & \sin\lambda_D & -\cos\lambda_D\sin\lambda_T \\ -\sin\lambda_D\cos\lambda_T & \cos\lambda_D & \sin\lambda_D\sin\lambda_T \\ \sin\lambda_T & 0 & \cos\lambda_T \end{bmatrix} \tag{5-2-2}$$

(2)半速度坐标系和目标坐标系之间的方向余弦阵 $\boldsymbol{H_O}$

原则上讲其方向余弦阵同式(2-2-42)表示的半速度坐标系与地理坐标系 $\boldsymbol{H_T}$ 相同，只是地理坐标系为动坐标系，目标坐标系为惯性坐标系。

$$\begin{bmatrix} x_h^0 \\ y_h^0 \\ z_h \end{bmatrix} = \boldsymbol{H_O} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \tag{5-2-3}$$

$$\boldsymbol{H_O} = \begin{bmatrix} \cos\sigma\cos\theta & \sin\theta & -\sin\sigma\cos\theta \\ -\cos\sigma\sin\theta & \cos\theta & \sin\sigma\sin\theta \\ \sin\sigma & 0 & \cos\sigma \end{bmatrix} \tag{5-2-4}$$

(3)地心坐标系和目标坐标系之间的方向余弦阵 $\boldsymbol{E_O}$

$$\begin{bmatrix} O_E X \\ O_E Y \\ O_E Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{E_O} \begin{bmatrix} o_o x \\ o_o y \\ o_o z \end{bmatrix} \tag{5-2-5}$$

$$\boldsymbol{E_O} = \begin{bmatrix} -\sin\varnothing_0 & \cos\varnothing_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varnothing_0 & \sin\varnothing_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-2-6}$$

(4)目标坐标系和地理坐标系之间的方向余弦阵 $\boldsymbol{T_O}$

$$\begin{bmatrix} x_T^0 \\ y_T^0 \\ z_T^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T_O} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \tag{5-2-7}$$

$\boldsymbol{T_O}$ 的表达式同地理坐标系和再入坐标系的方向余弦阵完全一样，由式(2-2-44)确定。

§5.2.2 再入机动弹头质心运动方程

1. *在半速度坐标系列写运动方程*

设地球为不旋转的圆球，故目标坐标系为惯性坐标系，将质心动力学方程投影到半速度坐标系 $o_1—x_h y_h z_h$。在三自由弹道仿真中，设速度坐标系与半速度坐标系重合，即倾侧角 $\nu=0$，且速度坐标系与目标坐标系按 2-3-1 的次序进行旋转。不考虑姿态发动机的推力，气动系数用平衡气动力系数，可以得质心运动方程如下

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= (R_{xh}/m) + g_{xh} \\ \dot{\theta} &= (R_{yh}/mv) + g_{yh}/v \\ \dot{\sigma} &= -(R_{zh}/mv\cos\theta) - g_{zh}/(v\cos\theta) \\ \dot{x} &= v\cos\theta\cos\sigma \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{z} &= -v\cos\theta\sin\sigma \end{aligned}\right\} \tag{5-2-8}$$

式中 R_{xh}、R_{yh}、R_{zh} 为空气动力在半速度坐标系中投影，g_{xh}、g_{yh}、g_{zh} 为引力加速度在半速度坐标系中投影

$$\begin{bmatrix} R_{xh} \\ R_{yh} \\ R_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} qS \tag{5-2-9}$$

$$\begin{bmatrix} g_{xh} \\ g_{yh} \\ g_{zh} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H_O} \begin{bmatrix} x \\ y + R_0 \\ z \end{bmatrix} \left(-\frac{\mu}{r^3}\right) \tag{5-2-10}$$

2. 几个辅助关系

纬度和经度的确定

$$\left.\begin{aligned}\varnothing &= \arcsin\left(\frac{x\cos\varnothing_0}{r} + \frac{(y+R_0)\sin\varnothing_0}{r}\right)\\ \lambda &= \lambda_0 + \mathrm{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-11}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_O \begin{bmatrix} x \\ R_0 + y \\ z \end{bmatrix} \tag{5-2-12}$$

$$r = \sqrt{x^2 + (y+R_0)^2 + z^2} \tag{5-2-13}$$

对地理坐标系的速度倾角和航迹偏航角

$$\theta_T = \mathrm{arctg}\left[\frac{v_{T_y}}{\sqrt{v_{T_x}^2 + v_{T_z}^2}}\right] \tag{5-2-14}$$

$$\sigma_T = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_{T_z}}{v_{T_x}}\right) \tag{5-2-15}$$

$$\begin{bmatrix} v_{T_x} \\ v_{T_y} \\ v_{T_z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{5-2-16}$$

式(5-2-8)共有六个微分方程，其中前三个用来确定再入飞行器质心运动速度的大小和方向，而后三个用来确定质心的坐标，辅助关系用来确定几个需要的量。

但式(5-2-8)是将速度坐标系按 2-3-1 次序由目标坐标系转动两次得到的。由前述知在接近目标时要求 θ 接近 90°，式(5-2-8)第三式出现分母为零的情况，为避免此现象，可按 3-2-1 转动次序得到速度坐标系，式(5-2-8)可改写成：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= (R_{xh}/m) + g_{xh} \\
\dot{\theta} &= \frac{R_{yh}}{mv\cos\sigma} + \frac{g_{yh}}{v\cos\sigma} \\
\dot{\sigma} &= -\left(\frac{R_{zh}}{mv} + \frac{g_{zh}}{v}\right) \\
\dot{x} &= v\cos\theta\cos\sigma \\
\dot{y} &= v\sin\theta\cos\sigma \\
\dot{z} &= -v\sin\sigma
\end{aligned}\right\} \tag{5-2-17}$$

其余的关系类似。

但式(5-2-8)或者式(5-2-17)要求解，需知α、β的变化规律。故实际解再入机动弹头的质心运动还需补充决定α、β大小的导引方程。

§5.2.3 导引方程

速度方向控制既要保证在无干扰情况下命中目标，又要保证末速度有一定的方向，即应该由导引方程来确定所需要的α、β的变化规律，以便由式(5-2-8)来确定弹道。

关于从优化原理得到导引方程放在下一小节讨论，现把结果写出来。

为了命中目标和控制末速在确定的方向，速度方向的变化率在视线坐标系$o_o\xi\eta\zeta$内应满足

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\gamma}_D &= K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{LD}(\lambda_D + \gamma_{DF})/T_g \\
\dot{\gamma}_T &= K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D
\end{aligned}\right\} \tag{5-2-18}$$

其中K_{GD}、K_{LD}和K_{GT}是由优化原理推导出的有关常数；

γ_{DF}是末端所要求的速度倾角；

$\dot{\gamma}_T$，$\dot{\gamma}_D$是再入机动弹头速度方向转动绝对角速度在视线坐标系η和ζ轴上的投影。

而

$$\left.\begin{aligned}\lambda_D &= \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)\\ \lambda_T &= \mathrm{arctg}\left(-\frac{z}{x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-19}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda}_D &= v_\eta/\rho\\ \dot{\lambda}_T &= -v_\zeta/(\rho\cos\lambda_D)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-20}$$

$$T_g = \rho/v_\xi \tag{5-2-21}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5-2-22}$$

v_ξ、v_η、v_ζ 为速度在视线坐标系各轴上的投影

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{5-2-23}$$

当已知 x、y、z 和 v_x、v_y、v_z 时可用式(5-2-19)至式(5-2-23)确定 $\dot{\lambda}_D$、$\dot{\lambda}_T$、λ_D 和 λ_T，再利用式(5-2-18)即可确定导引规律所要求的 $\dot{\gamma}_D$，$\dot{\gamma}_T$。

$\dot{\theta}$、$\dot{\sigma}$ 和 $\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$ 关系如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_\xi \\ \dot{\gamma}_T \\ \dot{\gamma}_D \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\sigma \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{\theta}\cos\sigma \end{bmatrix} \tag{5-2-24}$$

式(5-2-24)中 $\dot{\theta}$ 前面负号是因为速度方向由质心指向目标所引起。将 S_O 代入式(5-2-24)可以得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_D &= -\dot{\theta}\cos(\lambda_T-\sigma)\\ \dot{\gamma}_T &= \dot{\sigma}\cos\lambda_D - \dot{\theta}\sin(\lambda_T-\sigma)\sin\lambda_D\end{aligned}\right\} \tag{5-2-25}$$

解式(5-2-25)可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{-\dot{\gamma}_D}{\cos(\lambda_T - \sigma)} \\ \dot{\sigma} &= \frac{1}{\cos\lambda_D}[\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}_D \operatorname{tg}(\lambda_T - \sigma)\sin\lambda_D]\end{aligned}\right\} \tag{5-2-26}$$

当已知 $\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$，由式(5-2-26)可求出 $\dot{\theta}$、$\dot{\sigma}$，再利用式(5-2-8)可求出 R_{yh}、R_{zh}，即可求出 C_y 和 C_z，在 α、β 较小时利用 $C_y = C_y^\alpha \alpha$、$C_z = C_z^\beta \beta$ 可求出需要的 α、β。若 α、β 较大，则要利用 C_y、C_z 及 M 数反查 α、β。

§5.3 机动弹头最优导引规律

§5.3.1 相对运动方程

为了简化问题，以目标和再入机动弹头质心为基准，将运动分解为俯仰平面和转弯平面如图 5-5 所示。

其中俯仰平面定义为再入机动弹头质心 M 和目标 o 及地心 o_E 所确定的平面，其转弯平面定义为过目标和再入机动弹头质心而垂直于俯冲平面的平面。

基于再入机动弹头运动和控制的特点，转弯平面内的运动参数可视为小量，所以在确定再入机动弹头再入导引规律时，可将俯冲平面和转弯平面的运动分开研究。

下面先研究再入机动弹头在俯冲平面内的运动方程。

如图 5-5，v 为速度矢量，γ_D 为速度在俯冲平面内的方位角，λ_D 为视线角，η_D 为速度方向与视线间的夹角，ρ 为视线距离。

设 v 在俯冲平面内，图 5-5 中 $\gamma_D<0$，则

$$\eta_D = \lambda_D + \gamma_D \tag{5-3-1}$$

由图 5-5 知

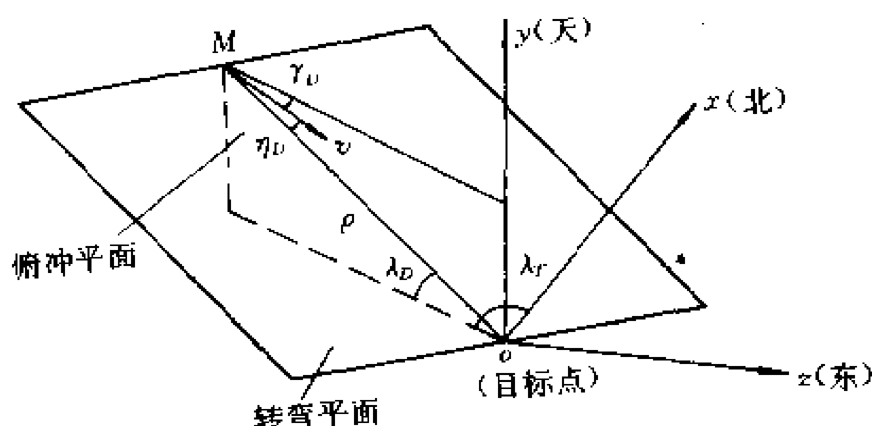


图 5-5 再入机动弹头俯冲平面和转弯平面示意图

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v\cos\eta_D \\ \rho\dot{\lambda}_D &= v\sin\eta_D\end{aligned}\right\} \tag{5-3-2}$$

由式(5-3-2)中第二式，两边对时间 t 求导，并将式(5-3-1)和式(5-3-2)代入，即可得俯冲平面内的相对运动方程：

$$\ddot{\lambda}_D = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\lambda}_D - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_D \tag{5-3-3}$$

同理令 $$\eta_T = \lambda_{TT} - \gamma_T$$

η_T 为速度矢量在转弯平面内与俯冲平面的夹角，γ_T 为速度在转弯平面内的方向角，λ_{TT}为视线角，此处的视线角为在转弯平面内的视线角，与前面定义的视线角有区别。类似式(5-3-2)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v\cos\eta_T \\ \rho\dot{\lambda}_{TT} &= v\sin\eta_T\end{aligned}\right\} \tag{5-3-4}$$

同俯冲平面内运动方程的推导，可得到在转弯平面内运动方程为：

$$\ddot{\lambda}_{TT} = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\lambda}_{TT} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_T \tag{5-3-5}$$

综上所述，可得再入机动弹头相对运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\lambda}_D &= \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\lambda}_D - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_D \\ \ddot{\lambda}_{TT} &= \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\lambda}_{TT} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_T\end{aligned}\right\} \tag{5-3-6}$$

§5.3.2 俯冲平面内最优导引控制规律

再入机动弹头的最优导引规律是终端有约束的最优导引规律。其终端约束条件包括再入机动弹头的落地倾角和落地速度大小(或者是某一高度上的速度倾角和速度大小)。因为要打到目标点,对射程也是有要求的。为简化研究,把速度大小和速度方向的控制分开进行。速度大小的控制在后面讨论,本小节研究的最优导引规律是对落地速度倾角有约束对固定目标进行攻击的机动弹头导引规律。

俯冲平面内的相对运动方程如式(5-3-3)所示,即

$$\ddot{\lambda}_D = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\lambda}_D - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_D \tag{5-3-3}$$

终端约束取视线角与要求的速度倾角相等,且视线转率等于零,即

$$\left.\begin{aligned}\lambda_D(t_f) &= -\gamma_{DF} \\ \dot{\lambda}_D(t_f) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{5-3-7}$$

该条件可保证落地时的速度倾角等于要求的落地倾角。

记

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= \lambda_D + \gamma_{DF} \\ x_2 &= \dot{\lambda}_D\end{aligned}\right\} \tag{5-3-8}$$

可得状态方程为:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\right)x_2 - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_D\end{aligned}\right\} \tag{5-3-9}$$

终端约束条件表达式(5-3-7)变成

$$\left.\begin{aligned} x_1(t_f) &= 0 \\ x_2(t_f) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-3-10}$$

在研究导引规律时，一般假定 $\dot{v}/v\approx 0$，且定义

$$T_g = -\frac{\rho}{\dot{\rho}} \qquad (\dot{\rho}\neq 0) \tag{5-3-11}$$

为什么要假定 $\dot{v}/v\approx 0$，因为不这样假设，得不到显示解，不便于分析，且导引控制为闭路控制，这样也是允许的。此时状态方程简化成：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2}{T_g}x_2 + \frac{1}{T_g}\dot{\gamma}_D \end{aligned}\right\} \tag{5-3-12}$$

记

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2/T_g \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/T_g \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2)^T \\ \boldsymbol{u} &= \dot{\gamma}_D \end{aligned}\right\} \tag{5-3-13}$$

则状态方程改写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{x}(t_f) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-3-14}$$

其中 t_f 为 $\rho=\rho_f$ 时的时间，ρ_f 为不等于零的小量。

这是一个变系数非齐次线性微分方程组，其中 $\boldsymbol{x}$ 为状态变量，$\boldsymbol{u}$ 为控制变量。

终端约束条件是射程一定时，对落地速度倾角有要求，而性能指标是什么呢？因为机动弹头不仅对落角有要求，而且对落速大小也有要求，因此在最优导引规律研究中应该使速度损失尽量小，以便有富余速度用来减速，否则满足了落速较小时的要求，当要求落

速较大时，便不能满足要求了，落速的大小主要取决于诱导阻力的大小，而诱导阻力的大小，又近似与 α^2 成正比，而攻角 α 又近似与 $\dot{\gamma}_D$ 的大小成正比，所以速度损失要小，即要求 $\int_0^{t_f}\dot{\gamma}_D^2\mathrm{d}t$ 要小，所以求最优再入机动导引规律的性能指标可选取为

$$J = \boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\dot{\gamma}_D^2\mathrm{d}t \tag{5-3-15}$$

其中 $\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)$ 称为补偿函数，$\boldsymbol{F}$ 为一个对称半正定常值矩阵，因为要求终端时刻 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$ 故 $\boldsymbol{F}\to\infty$。

这是一个典型的二次型性能指标的最优控制问题。

根据极大值原理[18]，线性系统二次型性能指标的最优控制为：

$$\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{5-3-16}$$

性能指标为式(5-3-15)时，$\boldsymbol{R}=1$，$\boldsymbol{u}^*=\dot{\gamma}_D$

于是得

$$\dot{\gamma}_D = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{5-3-17}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 可由逆黎卡提矩阵微分方程得到

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{P}}^{-1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = 0\\&\boldsymbol{P}^{-1}(t_f) = \boldsymbol{F}^{-1} = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-3-18}$$

为书写方便令 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}$，则式(5-3-18)改写成

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = 0\\&\boldsymbol{E}(t_f) = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-3-19}$$

将式(5-3-19)展开得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{E}_{11} & \dot{E}_{12}\\ \dot{E}_{21} & \dot{E}_{22}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2/T_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2/T_g\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/T_g^2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5-3-20}$$

展开式(5-3-20)得

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{11} &= E_{12} + E_{21} \\
\dot{E}_{12} &= E_{22} + \frac{2}{T_g}E_{12} \\
\dot{E}_{21} &= E_{22} + \frac{2}{T_g}E_{21} \\
\dot{E}_{22} &= \frac{4}{T_g}E_{22} - \frac{1}{T_g^2}
\end{aligned}\right\} \tag{5-3-21}
$$

由对称性知 $E_{12}=E_{21}$ (5-3-22)

于是式(5-3-21)变成

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{11} &= 2E_{12} \\
\dot{E}_{12} &= \frac{2}{T_g}E_{12} + E_{22} \\
\dot{E}_{22} &= \frac{4}{T_g}E_{22} - \frac{1}{T_g^2}
\end{aligned}\right\} \tag{5-3-23}
$$

终端条件为:

$$E_{11}(t_f) = E_{12}(t_f) = E_{22}(t_f) = 0$$

因为 t_f 为 $\rho=\rho_f$ 时的时间,而 ρ_f 为给定的终端值 ρ,因 T_g 不能为零,故 ρ_f 不能取为零。而

$$T_g = -\frac{\rho}{\dot{\rho}} = -\frac{\rho - \rho_f + \rho_f}{\dot{\rho}} = t_f - t + \Delta t_f = T_{gf} + \Delta t_f$$

上式中 $T_{gf} = \dfrac{\rho - \rho_f}{-\dot{\rho}} \qquad \Delta t_f = -\dfrac{\rho_f}{\dot{\rho}}$

因 $T_g = t_f - t + \Delta t_f$ 故 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}T_g$

注意到 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}T_g$,积分式(5-3-23)第三式得

$$
\begin{aligned}
E_{22} &= e^{4\int\frac{\mathrm{d}t}{T_g}}\left(\int -\frac{1}{T_g^2}e^{-4\int\frac{\mathrm{d}t}{T_g}}\mathrm{d}t + C\right) \\
&= e^{-4\int\frac{\mathrm{d}T_g}{T_g}}\left(\int \frac{1}{T_g^2}e^{4\int\frac{\mathrm{d}T_g}{T_g}}\mathrm{d}T_g + C\right) \\
&= \frac{1}{T_g^4}\left(\frac{1}{3}T_g^3 + C\right)
\end{aligned} \tag{5-3-24}
$$

由终端条件 $E_{22}(t_f)=0, T_g=\Delta t_f$

代入式(5-3-24)得 $C=-\frac{1}{3}\Delta t_f^3$

$$E_{22}=\frac{1}{3T_g}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^4}$$

类似积分式(5-3-23)第二式和第一式，且利用 $E_{12}(t_f)=E_{11}(t_f)=0$ 可得：

$$E_{12}=-\frac{1}{6}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^3}+\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^2} \tag{5-3-25}$$

$$E_{11}=\frac{1}{3}T_g-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^2}+\frac{\Delta t_f^2}{T_g}-\Delta t_f \tag{5-3-26}$$

故得：

$$E=\begin{pmatrix}\frac{T_g}{3}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^2}+\frac{\Delta t_f^2}{T_g}-\Delta t_f & -\frac{1}{6}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^3}+\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^2} \\ -\frac{1}{6}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^2}+\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^3} & \frac{1}{3T_g}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^4}\end{pmatrix} \tag{5-3-27}$$

显然当 $t=t_f$ 时，$T_{gf}=0, T_g=\Delta t_f$

$$E(t_f)=0$$

满足终端条件。

$$|E|=\frac{1}{12}-\frac{\Delta t_f}{3T_g}+\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^2}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^3}+\frac{\Delta t_f^4}{12T_g^4} \tag{5-3-28}$$

当 $|E|\neq 0$，对式(5-3-27)求逆得

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3T_g}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^4} & \frac{1}{6}+\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^3}-\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^2} \\ \frac{1}{6}+\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^3}-\frac{\Delta t_f^2}{2T_g^2} & \frac{T_g}{3}-\frac{\Delta t_f^3}{3T_g^2}+\frac{\Delta t_f}{T_g}-\Delta t_f\end{pmatrix}\frac{1}{|E|} \tag{5-3-29}$$

由条件 $|E|\neq 0$ 知须 $T_{gf}\neq 0, T_g\neq\Delta t_f$。

若$\triangle t_f$为小量，$\boldsymbol{P}$矩阵可简化

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3T_g} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{T_g}{3}\end{bmatrix}12=\begin{bmatrix}\frac{4}{T_g} & 2\\ 2 & 4T_g\end{bmatrix} \tag{5-3-30}$$

也可以这样近似求$\boldsymbol{P}$，当上述假设成立，$T_{gf}\neq 0$，$\triangle t_f$很小，则式(5-3-27)可简化为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\frac{T_g}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3T_g}\end{bmatrix} \tag{5-3-31}$$

对上式求逆可得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{T_g} & 2\\ 2 & 4T_g\end{bmatrix} \tag{5-3-32}$$

式(5-3-27)是$\boldsymbol{E}$矩阵的完整表达式，而式(5-3-31)是近似表达式。近似表达式不能在$t=t_f$时满足$E_{11}(t_f)=E_{12}(t_f)=E_{12}(t_f)=0$的条件。

将$\boldsymbol{P}$矩阵代入式(5-3-17)得

$$\dot{\gamma}_D=-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=-\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{T_g}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{T_g} & 2\\ 2 & 4T_g\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{DF}+\lambda_D\\ \lambda_D\end{pmatrix}$$

即

$$\dot{\gamma}_D=-4\dot{\lambda}_D-2\frac{(\lambda_D+\gamma_{DF})}{T_g} \tag{5-3-33}$$

式(5-3-33)为机动弹头在俯冲平面内的最优再入机动导引律。从式(5-3-33)看出，为了命中目标，且速度损失小，其最优导引规律相当于比例导航参数为4的比例导引。因为终端有约束，它增加了终端约束项，以保证命中点处落速方向满足要求。

§5.3.3 转弯平面内的最优导引控制规律

再入机动弹头在转弯平面内的运动方程如式(5-3-5)所示，即

$$\ddot{\lambda}_{TT}=(\frac{\dot{v}}{v}-\frac{2\dot{\rho}}{\rho})\dot{\lambda}_{TT}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\gamma}_T \tag{5-3-34}$$

类似俯冲平面内最优导引规律的假设，仍假设 $\dot{v}/v\approx 0, T_g=-\rho/\dot{\rho}(\rho\neq 0)$，式(5-3-34)可简化为：

$$\ddot{\lambda}_{TT}=\frac{2}{T_g}\dot{\lambda}_{TT}-\frac{1}{T_g}\dot{\gamma}_T \tag{5-3-35}$$

假设在命中目标时，仅要求 $\dot{\lambda}_{TT}(t_f)=0$ 而对 $\lambda_{TT}(t_f)$ 无要求，这是因为只要求落速方向为 γ_{DF}，但沿什么方向进入没要求，故 $\lambda_{TT}(t_f)$ 是自由的。取状态变量 $\boldsymbol{x}=\dot{\lambda}_{TT}, \boldsymbol{u}=\dot{\gamma}_T$ 可得状态方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{x}(t_f)&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-3-36}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\frac{2}{T_g}, \quad \boldsymbol{B}=-\frac{1}{T_g} \tag{5-3-37}$$

t_f 定义为 $\rho=\rho_f$ 时的时间，而 ρ_f 为某一给定的终端值。因状态矢量是一维的，下面书写省去矢量符号。与俯冲平面内研究方法相同，取性能指标为

$$J=x(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\dot{\gamma}_T^2 dt \tag{5-3-38}$$

要求 $x(t_f)=0$. 故 $F\to\infty$，可直接由二次型性能指标得最优控制为

$$\dot{\gamma}_T=-BPx \tag{5-3-38}$$

式中 P 由逆黎卡提方程

$$\dot{P}^{-1}-AP^{-1}-P^{-1}A+B^2=0 \tag{5-3-39}$$

得出。

将 A,B 代入式(5-3-39)得

$$\dot{P}^{-1} = \frac{4}{T_g}P^{-1} - \frac{1}{T_g^2} \tag{5-3-40}$$

终端条件为

$$P^{-1}(t_f) = F^{-1} = 0 \tag{5-3-41}$$

积分(5-3-40)且注意 $dT_g = -dt, T_g = T_{gf} + \triangle t_f$ 可得

$$P^{-1} = e^{4\int\frac{dt}{T_g}}\left(\int -\frac{1}{T_g^2}e^{-4\int\frac{dt}{T_g}}dt + c\right)$$

$$= \frac{1}{T_g^4}(\frac{1}{3}T_g^3 + C)$$

由 $P^{-1}(t_f) = 0$ 得 $C = -\frac{1}{3}\triangle t_f$

$$P^{-1} = \frac{1}{3T_g} - \frac{\triangle t_f^3}{3T_g^4} \tag{5-3-42}$$

当 $T_{gf} \neq 0$ 时，有

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{3T_g}{(1 - \frac{\triangle t_f^3}{T_g^3})} \tag{5-3-43}$$

当 $T_{gf} \neq 0$ 且 $\triangle t_f$ 为小量时，有

$$P = 3T_g \tag{5-3-44}$$

将式(5-3-44)代入式(5-3-38)得

$$\dot{\gamma}_T = 3\dot{\lambda}_{TT} \tag{5-3-45}$$

式(5-3-45)即是再入机动弹头在转弯平面内的最优导引控制规律。显然对转弯平面而言，其最优导引规律相当于比例导航参航为 3 的比例导引。

注意到

$$\dot{\lambda}_{TT} = \frac{-v_\zeta}{\rho}, \tag{5-3-46}$$

$$\dot{\lambda}_T = \frac{-v_\zeta}{\rho\cos\lambda_D} \tag{5-3-47}$$

故

$$\dot{\lambda}_{TT} = \dot{\lambda}_T\cos\lambda_D \tag{5-3-48}$$

则

$$\dot{\gamma}_T = 3\dot{\lambda}_{TT} = 3\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D \tag{5-3-49}$$

对比式(5-3-49)和式(5-2-18)可见 $K_{GT}=3$。

§5.4 机动弹头速度方向控制的仿真计算及分析

§5.4.1 速度方向控制三自由度仿真的数学模型

1. 质心运动方程

$$\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= R_{xh}/m + g_{xh} \\
\dot{\theta} &= R_{yh}/(mv) + g_{yh}/v \\
\dot{\sigma} &= -R_{zh}/(mv\cos\theta) - g_{zh}/(v\cos\theta) \\
\dot{x} &= v\cos\theta\cos\sigma \\
\dot{y} &= v\sin\theta \\
\dot{z} &= -v\cos\theta\sin\sigma
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-1}$$

2. 导引方程

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\gamma}_D &= K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{ID}/T_g(\lambda_D + \gamma_{DF}) \\
\dot{\gamma}_T &= K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_D &= \operatorname{arctg}(y/\sqrt{x^2+z^2}) \\
\lambda_T &= \operatorname{arctg}(-\frac{z}{x})
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda}_D &= v_\eta/\rho \\
\dot{\lambda}_T &= -v_\zeta/\rho\cos\lambda_D \\
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
T_g &= \rho/v_\xi
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-4}$$

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{5-4-5}$$

3. 求 α、β 的方程

式(5-4-1)要积分求弹道，需知控制变量 α、β、ν 的变化规律，

在三自由度弹道仿真时可令 $\nu=0$，仅需求解 α、β。

利用式(5-2-26)得 $\dot{\theta}$、$\dot{\sigma}$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{-\dot{\gamma}_D}{\cos(\lambda_T-\sigma)} \\ \dot{\sigma} &= (\dot{\gamma}_T-\dot{\gamma}_D \operatorname{tg}(\lambda_T-\sigma)\sin\lambda_D)/\cos\lambda_D\end{aligned}\right\} \tag{5-4-6}$$

再利用式(5-4-1)可得 R_{yh}、R_{zh}，进而可得 C_y、C_z，再利用气动系数反查便可以得 α、β 了。若 α、β 较小可用下式得 α、β

$$\left.\begin{aligned}v\dot{\theta} &= C_y^\alpha \alpha q S/m + g_{yh} \\ v\cos\theta\dot{\sigma} &= C_y^\alpha \beta q S/m - g_{yh}\end{aligned}\right\} \tag{5-4-7}$$

将得到的 α、β 代入式(5-4-1)便可以进行弹道仿真。

§5.4.2 三自由度弹道仿真和结果分析

1. 弹道仿真计算条件

假设再入机动弹头在再入点参数为：速度 $v=3870\text{m/s}$，速度倾角 $\theta=-45°$，高度 $h=45000\text{m}$，其质量和横截面积均为已知常数。

要求再入机动弹头落角 $\gamma_{DF}=-90°$，且飞行中受过程约束攻角 $\alpha \leqslant \alpha_{max}$、法向过载 $n_y \leqslant n_{ymax}$，其中 α_{max}、n_{ymax} 分别为允许的最大攻角和最大法向过载。

标准情况下导引方程中常数值

$$K_{GD} = -4$$
$$K_{LD} = -2$$
$$K_{GT} = 4$$

2. 仿真结果分析

按上述的运动方程和初值条件，根据推导的最优导引规律，得到如下结果。

图 5-6 表示高度 h 和射程 L 的关系、图 5-7 表示速度 v 和时间 t 的关系、图 5-8 表示速度倾角 θ、攻角 α 与时间 t 的关系、图 5-9

表示法向过载 n_y、攻角 α 与时间 t 的关系。

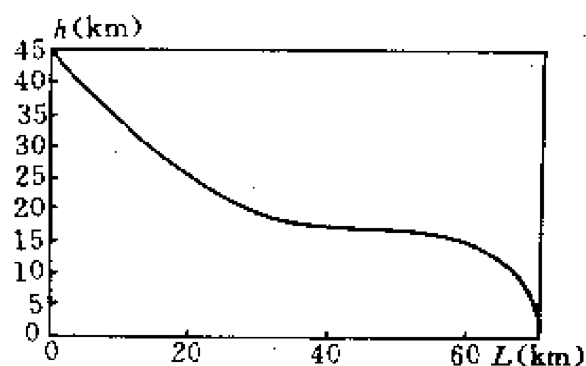


图 5-6　高度 h 和射程 L 间的关系

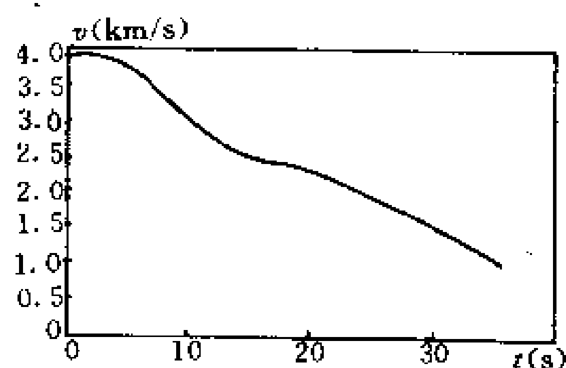


图 5-7　速度 v 和时间 t 的关系

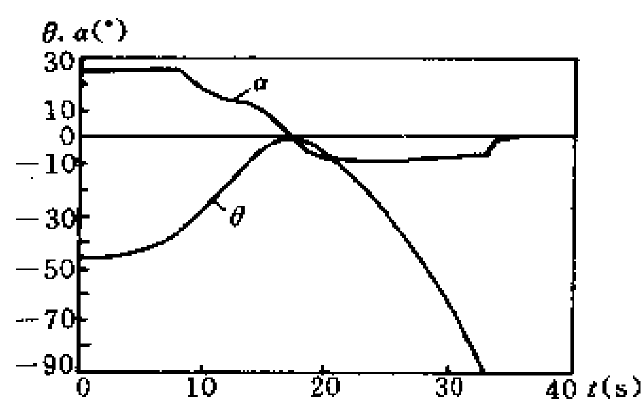


图 5-8　θ、$\alpha-t$ 曲线

当改变导引规律中的系数时，再入机动弹头落点参数要发生

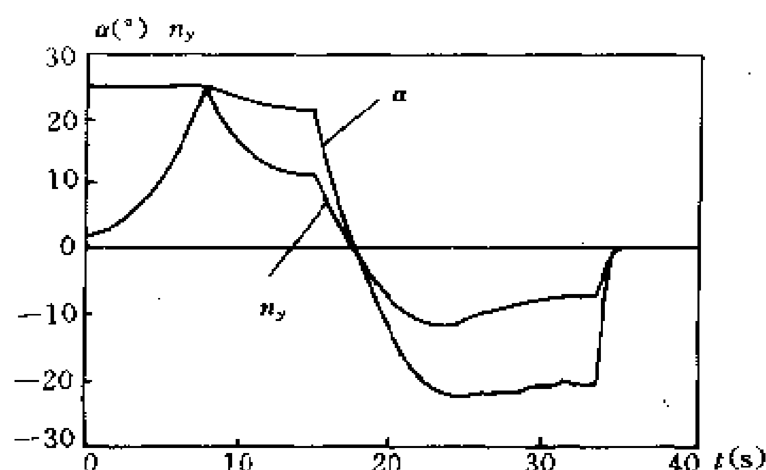


图 5-9 α、n_y—t 曲线

变化，表 5.1 给出了一组典型计算结果。表中ΔL、$\Delta\theta_F$、$\Delta\lambda_{DF}$、v 分别表示再入段射程偏差、落地速度倾角偏差、落地视线角偏差和落地速度。

表 5.1 K_{GD}、K_{LD}变化时ΔL、$\Delta\theta_F$、$\Delta\lambda_{DF}$、v 的变化

K_{GD}	K_{LD}	ΔL(m)	$\Delta\theta_F$(度)	$\Delta\lambda_{DF}$(度)	v(m/s)
−4	−2	0	0	0	989
−3.5	−2	12	−1.9	−1.2	886
−4.5	−2	10	−2.	−1.5	1040
−4	−1.5	7	−8.4	−8.9	1090
−4	−2.5	0	−0.01	0	856

仿真结果表明当 $K_{GD}=-4$ 和 $K_{LD}=-2$ 时，它保证了在满足终端速度倾角(视线角与速度倾角绝对值相等)约束条件下，使再入机动弹头落速最大。而当改变 K_{GD}和 K_{LD}时，或者不能满足终端约束条件，或者不能使飞行器落地速度最大，这说明所研究的导引规律是最优的。

当再入点运动参数有偏差时，再入机动弹头落点参数的变化

情况如表5.2。从表5.2的结果看出，在再入点运动参数存在偏差的情况下，按给出的导引规律进行控制，仍能保证满足终端约束条件，这说明它对再入点的参数偏差有良好的修正能力。

表5.2 再入点参数变化时$\triangle L$、$\triangle\theta_F$、$\triangle\lambda_{DF}$、v的变化

再入点参数偏差	$\triangle L$(m)	$\triangle\theta_F$(度)	$\triangle\lambda_{DF}$(度)	v(m/s)
$\triangle v=10$m/s	1.522	−0.26	−0.17	995
$\triangle v=-10$m/s	1.443	−0.25	−0.16	983
$\triangle\theta=5$度	1.167	−0.20	−0.13	1100
$\triangle\theta=-5$度	1.566	−0.27	−0.17	875

§5.5 再入机动弹头落速大小的控制

按§5.4.1提供的数学模型进行仿真计算，其落速方向能满足要求，但其落速大小往往不满足要求，如表5.1所示落速为989m/s，而要求的落速大小为410m/s到1070m/s，大多数情况落速偏大，需要专门的减速控制。而根据什么来进行减速呢？为此需要设计一条理想速度曲线，如果按此理想速度曲线变化，或者接近此曲线变化，则可以保证落速大小满足要求。当理想速度曲线设计好，如何把实际速度减小到理想速度曲线上，就是速度大小控制问题，简称速度控制。

§5.5.1 理想速度曲线的设计

设计的理想速度曲线，必须保证其落点速度近似等于要求的速度。理想速度曲线在接近目标段应该与实际情况差别较小，而高空段允许有大一些的偏差。理想速度曲线要便于计算，最好用解析表达式。

根据第三章式(3-1-8)，在忽略重力，且认为γ_D(即θ)为常数

时，再入段速度与高度的关系应满足

$$v = v_e e^{-K_0(e^{-\beta h}-e^{\beta h_e})/2} \tag{5-5-1}$$

式中 $K_0 = -C_x S\rho_0/\beta m\sin\Theta$

C_x 为零攻角阻力系数，m 为弹头质量，β 为 $\rho=\rho_0 e^{-\beta h}$ 中的常数，Θ 为当地速度倾角，在目前讨论的范围内，$\Theta\approx\gamma_D$，且为了突出 γ_D 的作用，将 K_0 写成 $K_0=-K_{01}/\sin\gamma_D, K_{01}=C_x S\rho_0/\beta m$。则式(5-5-1)可写成

$$v = v_e\left[e^{\frac{K_{01}}{2}(e^{-\beta h_e}-e^{-\beta h})}\right]^{-\frac{1}{\sin\gamma_D}} \tag{5-5-2}$$

对垂直降落 $\gamma_D=-90°$

$$v = v_e\left[e^{\frac{K_{01}}{2}(e^{-\beta h_e}-e^{-\beta h})}\right] \tag{5-5-3}$$

设 $h_e=h_F=0, v_e=v_F$ 则

$$v = v_F\left[e^{\frac{K_{01}}{2}(1-e^{-\beta h})}\right] \tag{5-5-4}$$

将式(5-5-4)按台劳级数展开，且只取第一项，则式(5-5-4)可近似成

$$v = v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})] \tag{5-5-5}$$

若只取第一项，则 $æ=K_{01}/2$，实际上式(5-5-5)中的 æ 是可以调整的，以便更符合实际情况。实际的再入机动弹道 γ_D 既不恒等于 $-90°$，也不为常数，而是一个变数。它的变化规律由导引规律决定，且 C_x 也不全是零阻力系数，攻角是变化的。根据设计理想速度曲线的要求，目前可以有几种方法设计理想速度曲线。

(1)将 γ_D 逐段取常数，用式(5-5-2)进行计算。这显然很繁，不满足理想速度曲线设计要简单的要求。

(2)取 $\gamma_D=-90°$，即用垂直段的近似公式(5-5-5)作为理想速度曲线，通过调整 æ 和 β 来满足其它要求。

(3)考虑 γ_D 的变化，且垂直段要准，但不是以 γ_D 为自变量，而是以 λ_D 为计算量，国外文献有如下经验公式：

$$v_c = v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})]^c \qquad (5\text{-}5\text{-}6)$$

式中的 c 表示对 $\gamma_D \neq -90°$ 时的修正

$$\left.\begin{array}{ll} c = 1/[\sin\lambda_D \cos^2(\lambda_D + \gamma_{DF})] & 当\ c < 2 \\ c = 2 & 当\ c \geqslant 2 \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}5\text{-}7)$$

上述后两个方案均可用，第三方案更接近实际情况，本书仿真采用第三方案。

不管何方案，由于图形匹配时要对位置进行修正，为了保证有剩余的速度用于修正位置误差，所以实际的理想速度曲线如下：

$$v^*(h) = \begin{cases} v_c + \triangle v_p & 当\ h \geqslant h_c \\ v_c & 当\ h < h_c \end{cases} \qquad (5\text{-}5\text{-}8)$$

其中 h_c 为匹配开始高度，$\triangle v_p$ 根据实际情况事先选用，仿真结果的 $h \sim v$ 曲线变化规律如图 5-10 所示。

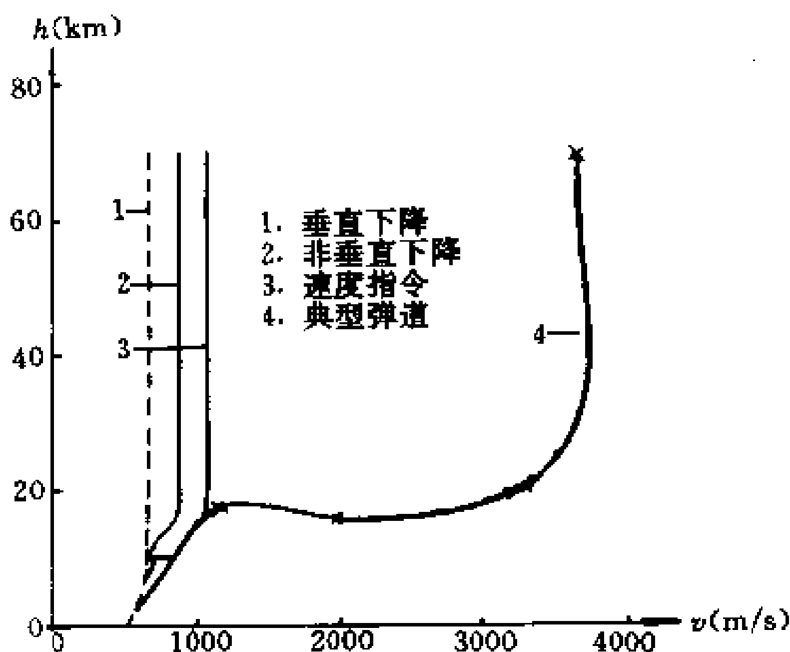


图 5-10 $h \sim v$ 变化规律曲线

§5.5.2 速度大小控制问题

速度控制就是如何把实际速度控制到理想速度曲线上去。如果单纯从减速的角度出发，可以有很多方法，因为只要增大攻角，产生附加的诱导阻力，使速度减下来，从原则上讲都是可以的，但如何增加攻角有不同的方法，本文介绍一种在垂直方向增加攻角的方法，仿真结果较理想，满足设计要求。

1. 附加的诱导阻力加速度

设从某一时刻算起，以后无附加的减速运动，而由导引规律确定该时刻总攻角 $\bar{\eta}=\sqrt{\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2}$，则此时阻力加速度为

$$mA_{xc}=-\frac{1}{2}\rho_c v_c^2 S(C_{x0}+C_{xi})$$

$$=-\frac{1}{2}\rho_c v_c^2 S(C_{x0}+C_N^{\alpha}\bar{\eta}^2) \qquad (5\text{-}5\text{-}9)$$

其中 C_{x0} 为 $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=\bar{\eta}=0$ 时的阻力系数，C_{xi} 为 $\bar{\eta}$ 引起的诱导阻力系数。

若从同一时刻开始有附加的减速运动，设其总攻角为 η，且 $\eta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，但 α,β,η 均是未知的，则此时阻力加速度为

$$mA_x=-\frac{1}{2}\rho v^2 S(C_{x0}+C_N^{\alpha}\eta^2) \qquad (5\text{-}5\text{-}10)$$

显然 $\eta>\bar{\eta}$，否则不能称减速运动，由于 $\eta>\bar{\eta}$ 会引起附加的切向加速度，在同一观察时刻以后的短时间内可近似认为 $v_c\approx v$，$\rho_c\approx\rho$，则

$$m(A_x-A_{xc})=-\frac{1}{2}\rho v^2(\eta^2-\bar{\eta}^2)C_N^{\alpha}S \qquad (5\text{-}5\text{-}11)$$

A_x-A_{xc} 表示由附加总攻角引起的附加的诱导阻力加速度，它的大小由 $\eta^2-\bar{\eta}^2$ 决定，而 $\eta^2-\bar{\eta}^2$ 如何计算与减速运动如何加到不减速运动上去有关，这将放在后面讨论，下面先讨论一个近似关

系。

2. α、β 与 $\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$ 的近似关系

如果没有附加的减速运动，$\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$ 可由导引规律确定，再通过坐标变换，可以求出 $\dot{\theta}$、$\dot{\sigma}$，再根据 $\dot{\theta}$、$\dot{\sigma}$ 与 α、β 的关系，可以求出所需的 α、β。为了下面讨论方便，认为转弯平面运动和俯冲平面运动分开，可近似认为

$$-\dot{\gamma}_D \approx \dot{\theta} \quad 而 \quad \dot{\theta} \approx \frac{\rho v S}{2m} C_y^{\alpha} \alpha \quad 故 \quad -\dot{\gamma}_D \approx K_2 \alpha$$

而 $$\dot{\gamma}_T \approx \dot{\sigma} \cos\lambda_D, \dot{\sigma} = -\frac{\rho v S C_z^{\beta}}{2m\cos\theta} \quad 故 \quad \dot{\gamma}_T \approx K_2 \beta$$

总之近似地可以说

$$\dot{\gamma}_D \approx -K_2 \alpha \tag{5-5-12}$$

$$\dot{\gamma}_T \approx K_2 \beta \tag{5-5-13}$$

3. 附加攻角的计算

从式(5-5-11)看出，若已知$(A_x - A_{xc})$和 $\bar{\eta}$ 可以求出 η，但 $\bar{\eta}$ 和 η 与附加攻角 α_N 是什么关系尚未确定，下面从角速度关系入手，找其关系。

按导引规律要求的速度方向的转率为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_g &= \dot{\boldsymbol{\gamma}}_D + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_T \\ \dot{\gamma}_g &= \sqrt{\dot{\gamma}_D^2 + \dot{\gamma}_T^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-5-14}$$

而由附加攻角 α_N 产生的$\triangle\dot{\gamma}$ 是沿 $\dot{\gamma}_g$ 的垂直方向加上去，如图 5-11 所示。

由图 5-11 知

$$\left.\begin{aligned} \triangle\dot{\gamma}_D &= \frac{\dot{\gamma}_T}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma} \\ \triangle\dot{\gamma}_T &= -\frac{\dot{\gamma}_D}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{5-5-15}$$

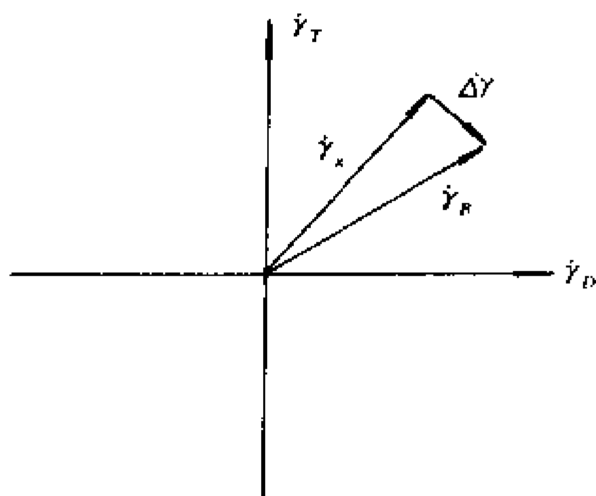


图 5—11 $\dot{\gamma}_B$ 与 $\dot{\gamma}_g$、$\Delta\dot{\gamma}$ 的关系图

故加上附加攻角后总的速度方向转动速率为：

$$\dot{\gamma}_B = \sqrt{\dot{\gamma}_g^2 + \Delta\dot{\gamma}^2} \tag{5-5-16}$$

故

$$\left.\begin{aligned} \dot{\gamma}_{BD} &= \dot{\gamma}_D + \frac{\dot{\gamma}_T}{\dot{\gamma}_g}\Delta\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}_{BT} &= \dot{\gamma}_T - \frac{\dot{\gamma}_D}{\dot{\gamma}_g}\Delta\dot{\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{5-5-17}$$

如果按近似表达式(5-5-12)和式(5-5-13)可得

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}}\alpha_N = \bar{\alpha} + \Delta\alpha \\ \beta &= \bar{\beta} + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}}\alpha_N = \bar{\beta} + \Delta\beta \end{aligned}\right\} \tag{5-5-18}$$

故
$$\eta^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \alpha_N^2 = \bar{\eta}^2 + \alpha_N^2 \tag{5-5-19}$$

即
$$\alpha_N^2 = \eta^2 - \bar{\eta}^2 \tag{5-5-20}$$

即不严格地说法，α_N 是在垂直于 $\bar{\eta}$ 的方向加上去的。

4. $\dot{\gamma}_B$ 公式的推导

因
$$\dot{\gamma}_g = \frac{\rho v S}{2m} C_y^\alpha \bar{\eta}$$

$$\triangle \dot{\gamma} = \frac{\rho v S}{2m} C_y^\alpha \alpha_N$$

故
$$\dot{\gamma}_B = \frac{\rho v S}{2m} C_y^\alpha (\bar{\eta}^2 + \alpha_N^2)^{1/2} \tag{5-5-21}$$

下面分析如何求 α_N 及 $\bar{\eta}$，设某一时刻实际速度 v 和理想速度 v^* 的差为 $v-v^*$，如果认为在 $T_g=-\rho/\dot{\rho}$ 时间内完成减速，则此时刻所需的平均加速度为 $(v-v^*)/T_g$，但实际上并不是在 T_g 时间内完成，所以应加一修正系数 K，故可以认为附加的切向加速度为

$$-K\left(\frac{v-v^*}{T_g}\right) = A_x - A_{\bar{x}}$$

代上式入式(5-5-11)得：

$$-K\left(\frac{v-v^*}{T_g}\right) = \frac{-1}{2m} \rho v^2 S C_N^\alpha \alpha_N^2$$

故由上式可得

$$\alpha_N = \left[\frac{2m}{C_N^\alpha S} K\left(\frac{v-v^*}{v}\right) \frac{1}{T_g} \frac{1}{\rho v}\right]^{1/2} \tag{5-5-22}$$

$\bar{\eta}$ 为无附加减速运动时，按导引规律确定的总攻角，当然可以由导引规律求出。但也可以采用下法。

设无附加的减速运动，则

$$mA_{\bar{x}} = -C_{x0} \frac{\rho v^2 S}{2} - \frac{\rho v^2 S}{2} C_N^\alpha \bar{\eta}^2$$

$$= mA_{x0} + mA_{xi} \tag{5-5-23}$$

其中 A_{x0}为 $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=0$ 时的阻力加速度，$A_{\bar{x}i}$为无附加减速运动时由总攻角 $\bar{\eta}$ 产生的诱导阻力加速度，即

$$mA_{\bar{x}i} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S C_N^\alpha \bar{\eta}^2 \tag{5-5-24}$$

由式(5-5-24)可得

$$\bar{\eta}=\left[\frac{2m}{C_N^{\alpha}S}\frac{1}{\rho v}\frac{|A_{xi}|}{v}\right]^{1/2} \tag{5-5-25}$$

代入式(5-5-22)和式(5-5-25)入式(5-5-21)可以得

$$\dot{\gamma}_B=\sqrt{\frac{(C_y^{\alpha})^2S}{2mC_N^{\alpha}}}\left\{\rho v\left[\left(\frac{v-v^*}{v}\right)K\left(\frac{-\dot{\rho}}{\rho}\right)+\frac{|A_{xi}|}{v}\right]\right\}^{1/2} \tag{5-5-26}$$

令

$$K_1=\sqrt{\frac{(C_y^{\alpha})^2S}{2mC_N^{\alpha}}},\varepsilon=\frac{v-v^*}{v}$$

式(5-5-26)变成

$$\dot{\gamma}_B=K_1\left\{\rho v\left[K\left(\frac{-\dot{\rho}}{\rho}\right)\varepsilon+\frac{|A_{xi}|}{v}\right]\right\}^{1/2} \tag{5-5-27}$$

该表达式与国外文献的表达式一致，其中诱导阻力加速度由下式求出

$$|A_{xi}|=\frac{\rho v^2S}{2m}(C_x-C_{x0}) \tag{5-5-28}$$

§5.6 机动弹头三自由度弹道仿真计算及分析

§5.6.1 机动弹头三自由度弹道仿真的数学模型

机动弹头再入飞行时既有速度方向的控制，又有速度大小的控制。进行三自由度弹道仿真的结构图如图5-12所示。图5-12表示三自由度弹道仿真时导航制导计算、运动方程及惯导误差之间的关系图。图5-12中$\Delta\dot{W}_a$是平台系统视加速度误差，它的大小由平台惯导系统的误差模型确定，它包括加速度误差、陀螺仪的漂移和平台角误差。

1. *质心运动方程*

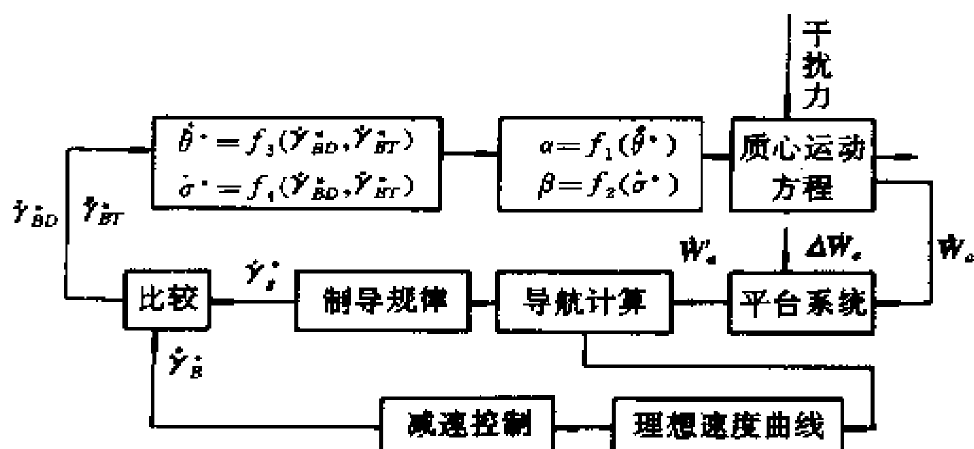


图 5-12 三自由度仿真时的结构图

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= R_{xh}/m + g_{xh} \\
\theta &= R_{yh}/mv + g_{yh}/v \\
\dot{\sigma} &= -R_{zh}/(mv\cos\theta) - g_{zh}/(v\cos\theta) \\
\dot{x} &= v\cos\theta\cos\sigma \\
\dot{y} &= v\sin\theta \\
\dot{z} &= -v\cos\theta\sin\sigma
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-1}
$$

2. 导引方程

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\gamma}_D &= K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{LD}/T_g(\lambda_D + \gamma_{DF}) \\
\dot{\gamma}_T &= K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-2}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_D &= \mathrm{arctg}(y/\sqrt{x^2 + z^2}) \\
\lambda_T &= \mathrm{arctg}(-z/x)
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-3}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda}_D &= v_\eta/\rho \\
\dot{\lambda}_T &= -v_\zeta/(\rho\cos\lambda_D) \\
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
T_g &= \rho/v_\xi
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-4}
$$

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{5-6-5}$$

3. 速度控制方程

$\dot{\gamma}_B$ 的计算公式为:

$$\dot{\gamma}_B = K_1\{\rho v[K(-\dot{\rho}/\rho)\varepsilon + |A_{xi}|/v]\}^{1/2} \tag{5-6-6}$$

式中

$$\varepsilon = (v - v^*)/v$$

$$|A_{xi}| = \frac{\rho v^2 S}{2m}(C_x - C_{x0})$$

K_1、K 为可调节参数,$|A_{xi}|$ 为诱导阻力产生的加速度。

而理想速度 v^* 的计算公式为:

$$v^* = \begin{cases} v_c + \triangle v_p & \text{当 } h \geqslant h_c \\ v_c & \text{当 } h < h_c \end{cases} \tag{5-6-7}$$

$$v_c = v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})]^c \tag{5-6-8}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= 1/[\sin\lambda_D \cos^2(\lambda_D + \gamma_{DF})] & \text{当 } c \leqslant 2 \\ c &= 2 & \text{当 } c > 2 \end{aligned}\right\} \tag{5-6-9}$$

$\triangle v_p$ 为理想速度的修正量,æ 为可调节参数。

4. 求 α、β 的方程

对三自由度弹道仿真,为了唯一地确定弹道,需要确定 α、β 的变化规律。当不考虑减速运动时,α、β 的变化规律由导引规律确定,如式(5-4-6)或者式(5-4-7)所示。当既考虑导引规律,又考虑减速控制时,确定 α、β 的变化规律稍有不同。

首先分别由导引规律和减速规律计算出所需的速度方向变化率 $\dot{\gamma}_g$ 和 $\dot{\gamma}_B$。

其次对 $\dot{\gamma}_g$ 和 $\dot{\gamma}_B$ 进行比较计算出$\triangle\dot{\gamma}$、$\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$

$$\left.\begin{aligned} \triangle\dot{\gamma} &= \sqrt{\dot{\gamma}_B^2 - \dot{\gamma}_g} & \text{当 } |\dot{\gamma}_B| > |\dot{\gamma}_g| \\ \triangle\dot{\gamma} &= 0 & \text{当 } |\dot{\gamma}_B| \leqslant |\dot{\gamma}_g| \end{aligned}\right\} \tag{5-6-10}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_{BD}&=\dot{\gamma}_D+\frac{\dot{\gamma}_T}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma}\\\dot{\gamma}_{BT}&=\dot{\gamma}_T-\frac{\dot{\gamma}_D}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma}\end{aligned}\right\}\tag{5-6-11}$$

再由 $\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$决定 θ、$\dot{\sigma}$ 的大小，方法类似式(5-4-6)，但应用 $\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$代替 $\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$。

$$\left.\begin{aligned}\theta&=-\dot{\gamma}_{BD}/\cos(\lambda_T-\sigma)\\\dot{\sigma}&=[\dot{\gamma}_{BT}-\dot{\gamma}_{BD}\mathrm{tg}(\lambda_T-\sigma)\sin\lambda_D]/\cos\lambda_D\end{aligned}\right\}\tag{5-6-12}$$

再利用式(5-6-1)可以得 R_{yh}、R_{zh}，进而可得 C_y、C_z，再利用气动系数反查便可以得 α、β 了。

利用式(5-6-1)到式(5-6-12)便可以在给定的初始条件和有关参数后进行弹道仿真。

§5.6.2 机动弹头三自由度弹道仿真计算和分析

设机动弹头再入点运动参数如下：

$v=3650\mathrm{m/s}, \theta=-44.3°, h=45\mathrm{km}, m/S=2035\mathrm{kg/m^2}$

导引控制参数：$K_{GD}=-4, K_{GL}=-2, K_{GT}=4$

速度控制参数：$æ=0.4126, K_1=0.0225$

$K=6.27$(当 $h>7.2\mathrm{km}$)，　$K/T_g=0.0001$(当 $h\leqslant 7.2\mathrm{km}$)

终端约束条件：$\gamma_{DF}=-90°, v_F=520\mathrm{m/s}$

过程约束条件：$\alpha\leqslant\alpha_{max}, n_y\leqslant n_{ymax}$

仿真计算结果如图 5-13、图 5-14。图 5-13 表示了高度 h 和射程 L 的关系，同时画出了 α 和 n_y 随时间的变化曲线。图 5-14 画出了 $\dot{\gamma}_g$、$\dot{\gamma}_B$ 的变化过程。计算结果落速大小误差 1m/s，而落速方向误差在 0.1°左右，落点位置误差在 1m 左右。仿真结果说明，在标准情况下，最优导引规律、速度大小控制方法在导引过程中较好地满足终端约束条件和过程约束条件，确保机动弹头以要求的速度大小和方向准确命中目标，满足设计要求。

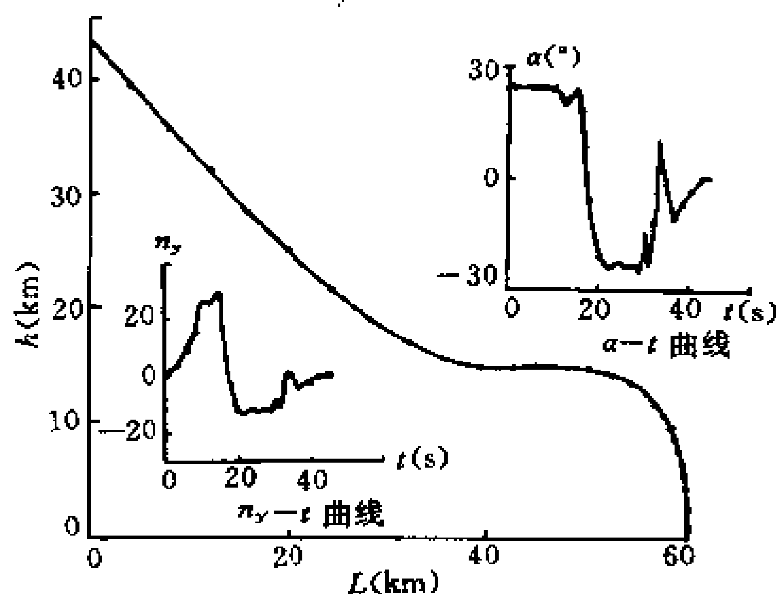


图 5-13 h～L 关系曲线

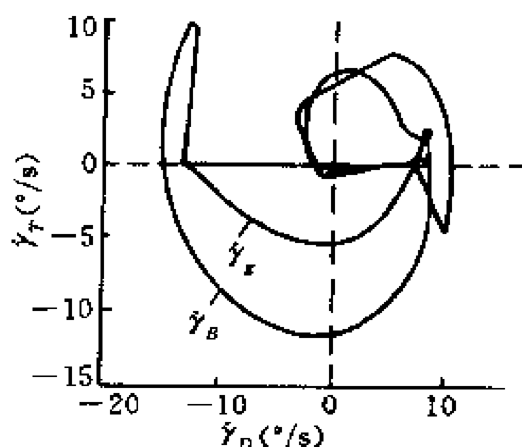


图 5-14 $\dot{\gamma}_x$、$\dot{\gamma}_B$ 变化规律曲线

下面对减速控制中几个参数 æ、K_1、K 的选择作一说明。

1. 理想速度调节参数 æ 的选取原则

理想速度曲线中调节参数 æ 应根据不同的飞行任务选取不同的常数。由图 5-10 看出，调节参数 æ 对理想速度曲线的形状有

影响。

图 5-10 中左边一条曲线为不考虑 c 的影响和$\triangle v_p$ 的修正时

$$v^* = v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})]$$

的曲线。显然 æ=0 时，$v^*=v_F$。当 æ>0 且取常数时，则 æ 愈大，v^* 也将愈大。因此理想曲线要求陡一些，æ 相应的应选择小一些，相反如果理想速度曲线要求平缓一些，æ 相应地应选择大一些。一般说来，æ 值既可以以某一高度为界分段取常数，也可以整个取常数。图 5-10 是整个取常数的结果。

2. $\dot{\gamma}_B$ 中调节参数 K_1 的选取原则

根据理论分析，$\dot{\gamma}_B$ 中的调节参数 K_1 的理论值为：

$$K_1 = \sqrt{(C_y^\alpha)^2 S/(2mC_N^\alpha)}$$

但实际上它反映了增益的大小，它的大小反映了希望用大一些还是小一些的 $\dot{\gamma}_B$ 来进行减速控制。

本例计算的理论值 $K_1 \approx 0.02$，而实际取值 $K_1 = 0.0225$，可见二者存在一定的差别。

3. $\dot{\gamma}_B$ 中调节参数 K 的选取原则

从 $\dot{\gamma}_B$ 的表达式看出：$\dot{\gamma}_B$ 中调节参数 K 的大小包括两方面的含义：一方面是对 T_g 的修正，另一方面从式(5-5-27)看出，K 的作用相当于加权因子。若其它参数不变，加大调节参数 K 值，相当于误差项的作用加强，从而使 $\dot{\gamma}_B$ 加大，如 α 和 n_y 不超过限制值，加大调节参数 K 的值，相当于加大 α_N。

同时 K 的选取还应考虑 T_g 的作用，因 T_g 较小时，K 值应小一些。为了克服 T_g 过小带来的影响，调节参数 K 以某一高度为界分段取值为宜。

本例取

$$\begin{cases} K = 6.27 & (\text{当 } h > 7.2\text{km}) \\ K/T_g = 0.0001 & (\text{当 } h \leqslant 7.2\text{km}) \end{cases}$$

4. 机动弹头的精度分析

机动弹头三自由度弹道仿真模型，除了通过仿真对减速控制的调节参数 æ、K_1 和 K 进行选择，以满足导引和减速控制要求，设计出标准弹道外，还可以在标准轨道的基础上进行精度分析，在进行精度分析时应考虑如下几种干扰：

(1)初始条件偏差，主要是主动段关机点误差引起的；

(2)大气密度、气动系数和质量偏差等；

(3)风的影响；

(4)惯性器件的误差。

因为制导指令是由惯性器件测量和计算出来，当惯性器件有误差会导致导航计算误差，因而会引起落点偏差。机动弹头为了修正惯性器件计算出位置的偏差，在三个不同的高度进行三次地图匹配和误差修正，可以大大地提高位置偏差的精度。

由于上述误差是随机误差，除了采用最大偏差法分析单项误差的影响外，计算落点偏差还应采用蒙特卡洛方法随机抽样，求出方差，对精度进行分析。

§5.7 机动弹头六自由度弹道仿真及分析

§5.7.1 机动弹头六自由度弹道仿真的数学模型

1. 机动弹头六自由度弹道仿真的特点

关于三自由度弹道仿真和六自由度弹道仿真的区别在本书§2.5.1已作过一些讨论，这里结合机动弹头作进一步的讨论。

三自由度弹道仿真和分析有两个重要的假设：

(1)假设弹头在飞行过程中总是处在瞬时平衡状态，这体现在三自由度弹道仿真时，略去了机动弹头的转动方程组，采用的气动系数均是配平状态下的值。

(2)假设控制系统是理想的,能瞬时达到要求的舵偏角。再根据瞬时平衡假设,机动弹头能瞬时达到要求的姿态。其结构如图5-12所示。

在此假设下,研究了导引规律、减速控制规律、并分析按此导引、减速规律飞行时,攻角α、侧滑角β的变化规律。

这种作法在设计的初步阶段、研究标准轨道设计和初步精度分析时是允许的,可行的。但上述假设要以控制系统设计良好、弹头反应迅速为前提,否则上述假设不成立。因此当进一步研究如何实现机动弹头沿标准轨道飞行时,对具有临界静稳定性的机动弹头,即静稳定和静不稳定交替出现的机动弹头如何设计控制系统以保证其稳定飞行;在考虑了机动弹头的动态平衡过程时,所设计的控制系统能否满足要求;在考虑了各种干扰情况下,其精度是否满足要求是机动弹头研制中要解决的关键问题。

总之,当进一步研究如何实现机动弹头沿标准弹道飞行时,必须把机动弹头当成一个刚体,而且要设计一个性能良好的控制系统,通过整个系统的六自由度的弹道仿真,对再入后的导引规律、减速控制规律进行全面的仿真。只有这样,再进行有干扰情况下的误差分析,才更可信,更接近真实情况。进行六自由度的弹道仿真,可为半实物仿真打下基础。

六自由度弹道仿真最大的特点是要设计一个控制系统,并且无论是机动弹头弹体,还是控制系统必须考虑其动态过程,因此不能简单的认为六自由度弹道仿真就是增加了机动弹头的旋转运动,而要复杂的多。首先必须确定误差信号,并根据此误差信号综合设计一个控制系统,因为一般控制系统是按各通道分别设计的,必须通过六自由度弹道仿真对控制系统设计进行校验,且经过几个反复以达到设计要求。只有完成上述步骤后,才谈得上精度分析。

概括起来,机动弹头六自由度弹道仿真有下列特点:

(1)作为三自由度弹道仿真的质心运动方程可以认为只要给出控制变量α、β、ν就可以唯一地确定弹道，且认为姿态控制理想化，其调节时间为零，超调量也为零，完全可由导引规律、减速控制规律决定α、β、ν的大小。但作为六自由度弹道仿真所描述机动弹头质心和绕质心运动，只能通过广义舵偏角产生的控制力矩，改变机动弹头姿态，进而改变机动弹头飞行中的攻角α、侧滑角β、倾侧角ν，主要由α、β、ν来影响质心运动。除了姿态控制系统有动态过程外，机动弹头转动运动本身也是有一动态过程，控制力矩和稳定力矩，并不是瞬时达到平衡。

由于要考虑舵偏角引起的机动弹头的转动运动，这带来两个困难，转动运动相对于质心运动进行得快，为了计算不发散且误差较少，计算步长比三自由度弹道仿真的计算步长要小得多，这给大量的弹道仿真计算带来了困难，不仅如此，实际计算的微分方程数目也大大增加，特别是气动系数的计算量增加了许多倍。三自由度弹道仿真主要是计算C_A、C_N、C_z，且它们仅为M、α、β、h的函数，而六自由度弹道仿真，除了上述三个气动系数外，必须增加俯仰力矩系数、偏航力矩系数、滚动力矩系数以及俯仰、偏航和滚动三个通道的阻尼力矩系数，更复杂的是它们均要受舵偏角δ_φ、δ_ψ、δ_γ的影响，并且彼此有交连。因此必须事先给气动系数加以处理，形成便于计算的公式，且自变量除了α、β、M、h外还增加了δ_φ、δ_ψ、δ_γ，这给右函数的计算量增加许多。机动弹头飞行速度、高度变化很大，M数可由12变化到2左右，高度由45km变化到零，又有舵偏角的变化，这种弹头的六自由度弹道仿真是较复杂的。

(2)根据三自由度标准弹道设计，从45km开始先是以正攻角25°拉起，飞行过程中攻角经过零，而后又以负攻角25°压下。而目前机动弹头为了增加其机动性，压心与质心距离很近，这种机动弹头，在攻角绝对值$|\alpha|$较小时为静不稳定，而当攻角绝对值$|\alpha|$较大时为静稳定，也就是说机动弹头再入过程中，既有$|\alpha|$较小的静不

稳定状态，又有$|\alpha|$较大的静稳定状态，这种变化在三自由度弹道仿真中如图 5-15 所示，其中 $m_z^\alpha<0$ 表示静稳定，$m_z^\alpha>0$ 表示静不稳定。

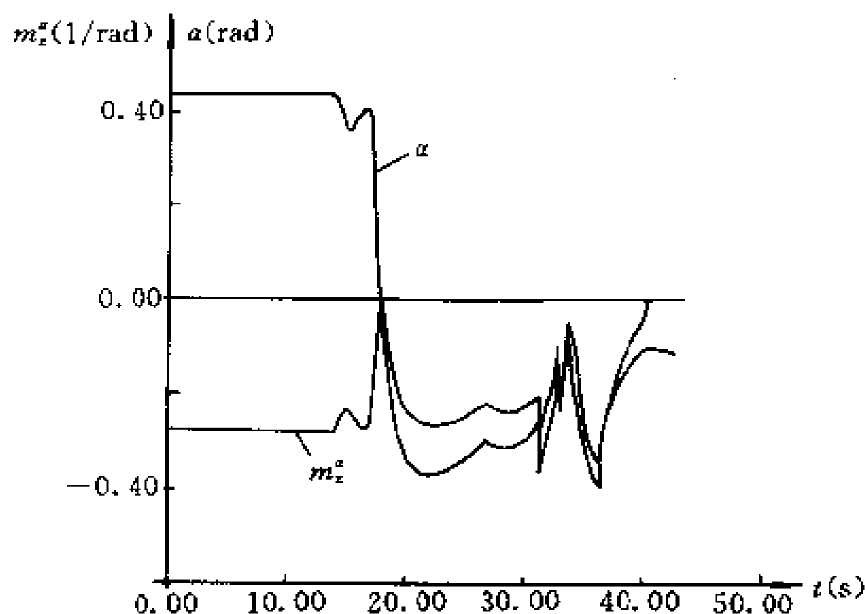


图 5-15　三自由度 m_z^α 与 α 和 t 的关系

在六自由度弹道仿真中 α 不可能跃变，其 α 和 m_z^α 的变化过程如图 5-16 所示。静稳定和静不稳定交替出现。

机动弹头飞行过程中出现两种静稳定性，给控制系统设计带来了较大的困难，设计好控制系统，使机动弹头在两种状态下都具有较好的快速性和稳定性，是机动弹头控制系统设计成败的关键。

另一方面，机动弹头再入过程中速度、高度剧烈变化，使动压发生巨大变化，进而使机动弹头弹体传递函数中的放大系数和时间常数变化很大，对前述的例子，放大系数 K 由 0.00379 变化到 0.68，放大了 182 倍，而时间常数 T 由 138.27 变化到 2.05，缩小为 1/67.5. 系数的剧烈变化也给控制系统校正带来了困难。

机动弹头再入过程中具有不同的静稳定度，且动压变化很大，

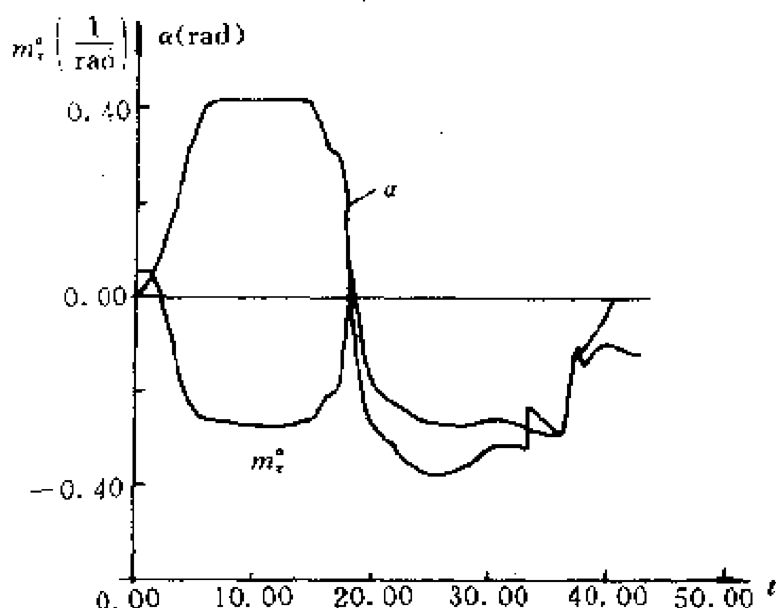


图 5-16 六自由度 m_{γ}^{α} 与 α 和 t 的关系

在三自由度弹道仿真时，因为不考虑机动弹头的转动运动，也没有控制系统设计问题，很简单认为控制系统能按要求提供需要的 α、β 和 ν，但是，六自由度弹道仿真时由于静稳定和静不稳定的弹头，其舵偏角 δ_φ、δ_ψ 和 α、β 的关系是不一样的。动压的剧烈变化，使系统放大系数变化很大，如何进行校正也是一个难题。

2. 姿态控制系统误差的形式及其综合设计

机动弹头六自由度弹道仿真，其控制变量为俯仰舵偏角 δ_φ、偏航舵偏角 δ_ψ 及滚动舵偏角 δ_γ，其大小和符号由误差的大小来确定。原则上讲把导引规律、减速控制规律确定的状态参数的要求值（加上标"＊"号表示）与机动弹头状态参数的测量值（加上标"′"号表示）或者实际值之差均可以作为姿态控制系统的误差信号，但目前常用的可以有以下几种：

(1)根据导引规律、减速控制规律确定的需要的速度方向变化率与实际测量到的速度方向变化率之差形成误差，即

$$\Delta = \dot{\gamma}'_B - \dot{\gamma}^*_B \tag{5-7-1}$$

（2）根据导引规律、减速控制规律确定的需要的视加速度 $\dot{W}^*$ 与实测的视加速度 $\dot{W}'$ 之差形成误差，即

$$\Delta = \dot{W}' - \dot{W}^*|_{y,z} \tag{5-7-2}$$

（3）根据导引规律、减速控制规律确定的需要加速度和实测加速度之差来形成误差，即

$$\Delta = A' - A^*|_{y,z} \tag{5-7-3}$$

$$A = \dot{W} + g \tag{5-7-4}$$

（4）根据导引规律、减速控制规律所确定的需要姿态角和实际姿态角之差形成误差，即

$$\Delta = (\varphi' - \varphi^*, \psi' - \psi^*, \gamma' - \gamma^*)^T \tag{5-7-5}$$

上述几种方法各有特色，如第四种方法，因为机动弹头虽有图像匹配末制导，但仅是通过图像匹配对惯导器件的误差进行修正，其基本控制规律，仍同于弹道式导弹，不同之处在于弹道导弹是通过飞行程序对导弹运动进行控制，而机动弹头是根据导引规律、减速控制规律，由飞行状态参数实时地确定程序角（φ^*、ψ^*、γ^*）进行控制。而实际的姿态角可直接由平台系统获得，不需要变换。这种误差形成方式简单，把质心控制问题变成了姿态跟踪问题，相当于引入了可变的飞行程序，概念上易于接受，且便于对攻角、过载进行限制。但此种方法如何求 φ^*、ψ^*、γ^* 和利用气动系数反查 α、β 值较繁，且存在着误差。第一种方法明显的是将攻击活动目标的导弹的误差形成方法借用过来，因此这种方法的特性同攻击活动目标的导弹特性差不多。第二种、第三种误差形成方法同第一种方法大同小异，因为把第一种方法的误差信号 $\Delta = \dot{\gamma}_B - \dot{\gamma}_B^*$ 乘上弹头速度 v，便可以得到第三种方法的误差信号。而第二种方法和第三种方法的区别在于如何处理引力加速度的影响，用视加速度之差作误差信号，是把导航计算出来的需要加速度减去引力加速度，得到需要的视加速度，再求误差信号。而第三种方法是把测量出来的视加速度加上引力加速度得到误差信号。因此原则上讲上述几种方法

均可以用。

本书介绍两种方法，首先介绍第二种方法，即用视加速之差作误差信号，这种方案是直接利用平台系统测量出来的视加速度与需要的视加速度之差作误差信号，比较简单。其六自由度弹道仿真的结构图如图 5-17 所示。

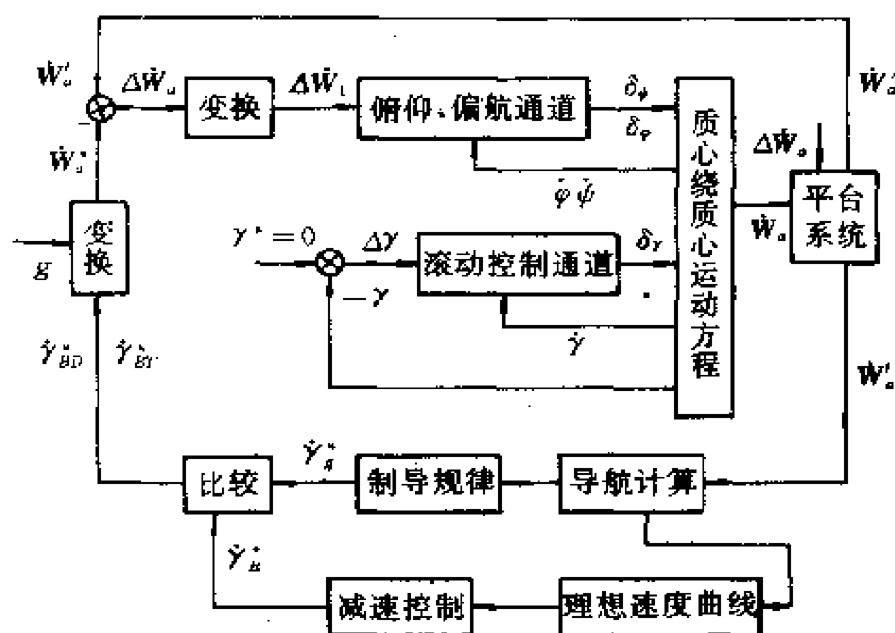


图 5-17 六自由度仿真时的结构图

其次讨论第四种方案，该方法把质心控制问题变成姿态跟踪问题，其姿态控制系统不同于其它三种，有其特色，其六自由度弹道仿真结构图如图 5-18 所示。

从图 5-17 和图 5-18 看出六自由度弹道仿真的数学模型同三自由度弹道仿真其导航计算部分是一样的，不同的是俯仰、偏航和滚动通道的组成及部分的动力学方程。两种误差信号组成方法对应的姿态控制系统不一样，应分别研究。

有了误差信号，能否根据此误差信号去形成控制指令产生舵偏角呢？显然是不行的。如前所述由于在飞行过程中静稳定度的

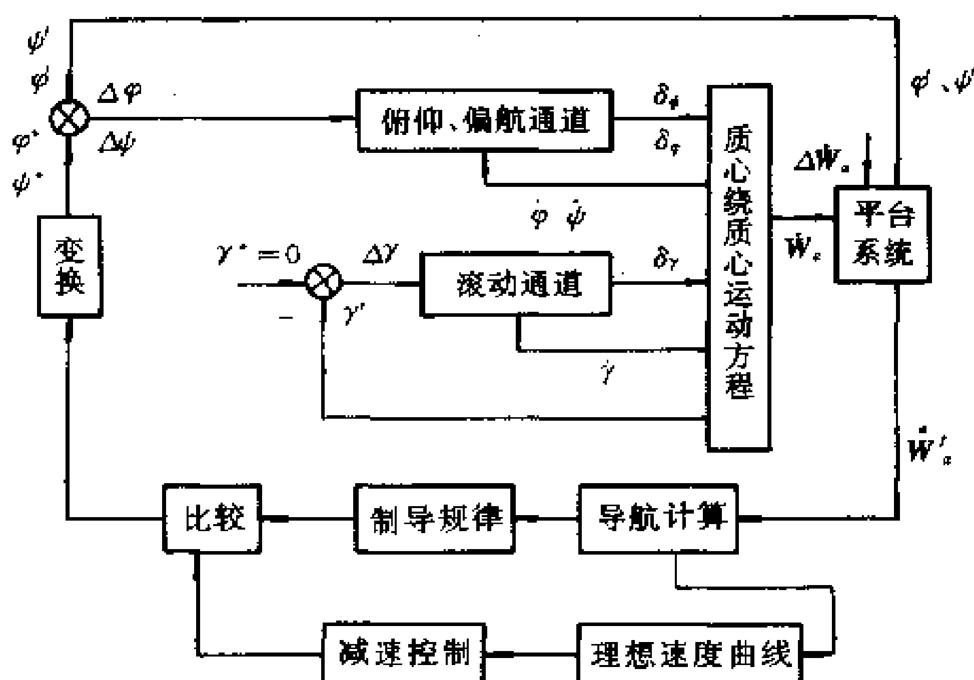


图 5-18 六自由度仿真时的结构图

变化、动压剧烈变化造成放大系数的剧烈变化，必须进行校正和综合。为了保证在静稳定和静不稳定时的稳定飞行和合适的过渡品质，对俯仰、偏航通道必须进行姿态角速度和其积分的输入，而滚动通道还需输入角加速度的反馈。为了克服动压剧烈变化带来的影响应对放大系数进行校正，下面分两种情况分别加以讨论。

(1)以视加速度差为误差信号的姿态控制系统

根据《大气飞行器姿态动力学》[5]的研究，对静稳定和静不稳定交替出现的机动弹头，必须加姿态角的反馈信号，而为了使机动弹头有足够的阻尼作用，应增加姿态角速度的反馈，为了适应在不同特征点弹体放大系数、时间常数的变化应对系统的放大系数进行校正。

目前机动弹头的姿态控制系统，仍按俯仰、偏航和滚动三个通道分别进行设计，且每个通道的设计又采用选择若干个特征点，对

每个特征点采用固化系数，将运动参数加以固化，将系统按常系数系统进行稳定和校正，以俯仰通道为例，其结构图如图5-19所示。

图中控制量为要求的视加速度分量 $\dot{W}_{y}^{*}$，反馈的信号为俯仰角 φ 和俯仰角速度 $\dot{\varphi}$。其中放大环节 k_c、k_{01}、k_{02}、k_{11}、k_{12}、k_{xi}是与弹体传递函数有关的设计参数，有些是常数，有些是高度的函数，以适应动压变化带来放大系数和时间常数的变化，保证每个特征点均有合适的动态品质。

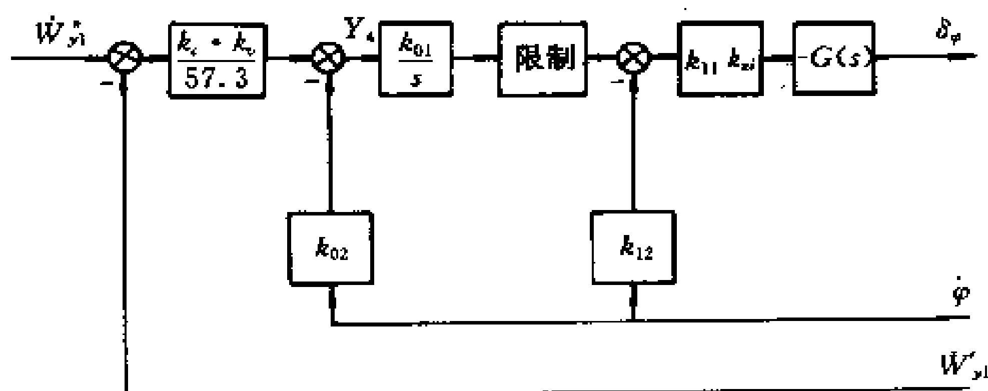


图5-19　俯仰通道的姿态控制系统结构图

图5-19各参数具体形式如下：

$$k_c = 15.4e^{-0.1036(50-h)} + 0.929$$

$$k_v = 1.0$$

$$k_{01} = 1.34/[0.0000008e^{0.235(50-h)} + 0.054]$$

$$k_{02} = 0.1,\qquad k_{11} = 10.0,\qquad k_{12} = 0.1$$

$$k_{xi} = 29.04e^{-0.14(50-h)} + 0.191$$

考虑到舵的最大限制 δ_{max}，在控制系统内部对输入舵机的信号进行限制，以保证输出的舵偏角在允许的范围内。

同时由于机动弹头还受到攻角与过载的限制，因此仿真中应对攻角、过载进行考察，以保证它们的值在允许的范围内。由于弹

头的攻角和过载都是通过舵偏转来实现的，对攻角和过载的限制即对舵偏角 δ_φ 进行限制。因此当机动弹头总攻角 $\alpha_T > \alpha_{max}$ 时，对俯仰通道的输入信号 W_y^* 进行限制。若输入系统的视加速度偏差信号使弹头总攻角继续增大，则令 $\Delta W_y = 0$，反之，若信号 ΔW_y 使弹头总攻角减小，则将其保持不变。对弹头过载的限制，与总攻角的限制相同。

由于机动弹头的对称性，弹头偏航通道的姿态控制系统与俯仰通道相似，但由于俯仰通道与偏航通道参数不完全相同，所以放大环节的数值和与高度关系不完全相同。

滚动通道是单独设计，它要求使姿态角 γ 稳定在零，是一个角稳定系统，其结构图如图 5-20。

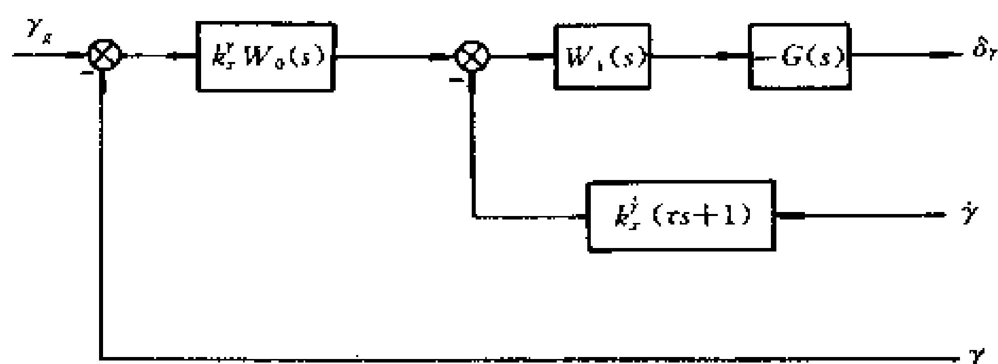


图 5-20 滚动通道的稳定回路结构图

图中 γ_g 是所需的滚动角，其值为零，系统的反馈除了角速度 $\dot\gamma$ 外还有角加速度 $\ddot\gamma$，这点，一般导弹控制系统没采用。另外为保证系统稳定和良好的品质，设计了两个校正网路：

$$W_0(s) = 17\frac{(2s+1)(0.14s+1)}{(0.00714s+1)(0.028s+1)} \tag{5-7-6}$$

$$W_1(s) = \frac{(0.05s+1)^2}{(s+1)^2} \tag{5-7-7}$$

在弹道仿真计算中，姿态控制系统的仿真单独为一模块，有其自身的仿真结构，在整个六自由度仿真中作为一个环节，只要给出姿态控制系统所需的输入参数，通过调用控制模块，即可得到所需舵偏角 δ_φ、δ_ψ 和 δ_γ 的数值。

(2)以姿态角差为误差信号的姿态控制系统

此时的姿态控制系统，类似弹道式导弹的姿态控制系统。仍按俯仰通道、偏航通道和滚动通道分别进行设计。也是采用选取若干个特征点，用固化系数法将运动参数固化，将系统变成常系数系统进行设计和分析。

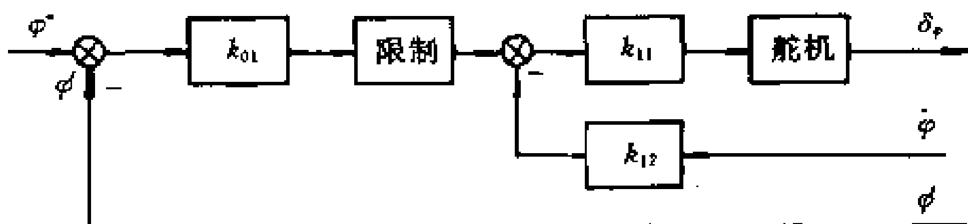


图 5-21　俯仰控制通道的结构图

俯仰通道的结构图如图 5-21。图中 φ^* 是由导引规律和减速规律确定的需要的俯仰角，而 $\dot{\varphi}$ 是实际的俯仰角速度，它反馈的目的是为了增加机动弹头的阻尼作用，而 φ 是实际的俯仰角，它是保证机动弹头稳定飞行所必需的反馈。同时作为系统的输出，通过它来实现所要求的导引和减速。其中放大环节的 K_{11} 为常数，K_{12}、K_{01} 为高度的函数。

由于机动弹头的轴对称性，机动弹头偏航通道的姿态控制系统与俯仰通道相似，只是放大环节的数值和与高度的关系稍有不同。

滚动通道仍然单独设计，它要求滚动角 γ 随要求的滚动角 γ^* 变化。若 $\gamma^*=0$ 则是稳定系统，若 $\gamma^*=\gamma^*(t)$，则是跟踪系统。

前面讨论过，这种误差组成方式是把质心控制问题变成了姿

态跟踪问题，相当于引入了可变的飞行程序。具体的讲，要求姿态角(φ,ψ,γ)跟踪可变的程序角($\varphi^*,\psi^*,\gamma^*$)，因此这种方法很重要的一个问题是如何求姿态控制系统的输入量φ^*、ψ^*和γ^*。

求输入量φ^*、ψ^*和γ^*有两种方法：

方法1 类似三自由度弹道仿真，令要求的倾侧角$\nu^*=0$，求φ^*、ψ^*、γ^*

①由导引规律和减速控制规律求出$\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$后，利用下式求需要的$\dot{\theta}^*$、$\dot{\sigma}^*$；

$$\dot{\theta}^*=\frac{-\dot{\gamma}_{BD}}{\cos(\lambda_T-\sigma)} \tag{5-7-8}$$

$$\dot{\sigma}^*=\frac{1}{\cos\lambda_D}[\dot{\gamma}_{BT}-\dot{\gamma}_{BD}\mathrm{tg}(\lambda_T-\sigma)\sin\lambda_D] \tag{5-7-9}$$

②由

$$\begin{cases}Y^*=mv\dot{\theta}^*+mg\cos\theta\\ Z^*=-mv\cos\theta\dot{\sigma}^*\end{cases} \tag{5-7-10}$$

求Y^*和Z^*；

③当已知Y^*、Z^*，由平衡升力系数求需要的α^*、β^*。因α^*、β^*不一定是小量，不能用$Y^*=C_y^\alpha\alpha^*qS$、$Z^*=C_z^\beta\beta^*qS$求α^*、β^*；

④由当时的速度方向θ、σ及$\nu^*=0$，和需要的α^*、β^*可求出需要的姿态角φ^*、ψ^*、γ^*。

根据八个欧拉角的关系，利用式(2-5-24)、(2-5-25)和(2-5-26)，令其中$\nu=0$可以得ψ^*、φ^*及γ^*

$$\sin\psi^*=\sin\sigma\cos\alpha^*\cos\beta^*+\cos\sigma\cos\alpha^*\sin\beta^*$$
$$-\pi/2<\psi\leqslant\pi/2 \tag{5-7-11}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi^*&=(\sin\theta\cos\sigma\cos\alpha^*\cos\beta^*+\cos\theta\sin\alpha^*\\&\quad-\sin\theta\sin\sigma\cos\alpha^*\sin\beta^*)/\cos\psi^*\\ \cos\varphi^*&=(\cos\theta\cos\sigma\cos\alpha^*\cos\beta^*-\sin\theta\sin\alpha^*\\&\quad-\cos\theta\sin\sigma\cos\alpha^*\sin\beta^*)/\cos\psi^*\end{aligned}\right\}$$

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi \tag{5-7-12}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma^* &= (\sin\sigma\sin\alpha^*\cos\beta^* + \cos\sigma\sin\alpha^*\sin\beta^*)/\cos\psi^* \\ \cos\gamma^* &= (-\sin\sigma\sin\beta^* + \cos\sigma\cos\beta^*)/\cos\psi^* \end{aligned}\right\}$$

$$-\pi < \gamma \leqslant \pi \tag{5-7-13}$$

此方法的特点是 $\nu^*=0$，接近三自由度弹道仿真，求解 φ^*、ψ^*、γ^* 形式上方便，实际上复杂的三角运算，在弹头上不易实现，应进行简化。此外 $\nu^*=0$，$\gamma^*\neq 0$，且是交变的，因此滚动通道不是一个稳定系统，而是一个跟踪系统，这一点会带来如下问题。

由式(2-3-64)知：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\cos\psi}(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma) \\ \dot{\psi} &= \omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma \\ \dot{\gamma} &= \omega_{x1} + \mathrm{tg}\psi(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{5-7-14}$$

当 $\gamma=0$，$\omega_{y1}=\dot{\psi}$，$\omega_{z1}=\dot{\varphi}\cos\psi$，$\dot{\gamma}=\omega_{x1}+\dot{\varphi}\sin\psi$，$\omega_{y1}$，$\omega_{z1}$ 分别对应于 $\dot{\psi}$、$\dot{\varphi}$ 相互交连少。而当 $\gamma\neq 0$，则 ω_{y1}、ω_{z1} 与 $\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$ 相互间有交连，这是不利的。而且按习惯对滚动通道是稳定系统，即输入量 $\gamma^*=0$ 这样 ν^* 就不等于零。

方法 2　要求滚动通道是角稳定系统，即令 $\gamma^*=0$，求 φ^*、$\dot{\psi}^*$

①由导引规律和减速规律求出 $\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$ 后，求出需要的 $\dot{\theta}^*$，$\dot{\sigma}^*$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\theta}^* &= \frac{-\dot{\gamma}_{BD}}{\cos(\lambda_T-\sigma)} \\ \dot{\sigma}^* &= \frac{1}{\cos\lambda_D}[\dot{\gamma}_{BT} - \dot{\gamma}_{BD}\mathrm{tg}(\lambda_T-\sigma)\sin\lambda_D] \end{aligned}\right\} \tag{5-7-15}$$

②近似估出 Y^* 及 Z^*

因 $\nu^*\neq 0$，故

$$\left.\begin{aligned} mv\dot{\theta}^* &= Y^*\cos\nu^* - Z^*\sin\nu^* - mg\cos\theta \\ -mv\cos\theta\dot{\sigma}^* &= Y^*\sin\nu^* + Z\cos\nu^* \end{aligned}\right\} \tag{5-7-16}$$

由上式得出

$$
\left.\begin{aligned}
Y^* &= (mv\dot{\theta}^* + mg\cos\theta)\cos\nu^* - mv\dot{\sigma}^*\cos\theta\sin\nu^* \\
Z^* &= -(mv\dot{\theta}^* + mg\cos\theta)\sin\nu^* - mv\dot{\sigma}^*\cos\theta\cos\nu^*
\end{aligned}\right\} \tag{5-7-17}
$$

因 $\gamma^*=0$，而 ν^* 不一定等于零，所以 Y^*、Z^* 求不出，只有近似认为 $\nu^*=\nu$，ν 为倾侧角的实际值。

③已知 Y^*、Z^* 求 α^*、β^* 的问题

三自由度弹道仿真时，气动系数是取配平状态下的气动系数，已知 Y^*、Z^* 通过反查气动系数，可以得 α^*、β^*。严格地讲，六自由度弹道仿真不能用配平气动系数，此时 $Y^*=Y^*(\alpha^*、\beta^*、\delta_\varphi^*、\delta_\psi^*、\delta_\gamma^*)$，$Z^*=Z^*(\alpha^*、\beta^*、\delta_\varphi、\delta_\psi、\delta_\gamma)$，反查 α^*、β^* 很困难，因为 δ_φ、δ_ψ、δ_γ 不同，其解也不是唯一的。为了简化仍用配平状态气动系数进行反查得 α^*，β^*。

④由当时的速度方向 θ、σ 及 $\gamma^*=0$，加上需要的 α^*、β^* 可求出需要的姿态角 φ^*、ψ^*，同时也需求出 ν^*。

因
$$B_O(\varphi,\psi,\gamma)=B_V(\alpha,\beta)V_O(\theta,\sigma,\nu)$$

令 $\gamma=0$，$\varphi=\varphi^*$，$\psi=\psi^*$，$\alpha=\alpha^*$，$\beta=\beta^*$，$\nu=\nu^*$，可以得

$$\cos\alpha^*\cos\sigma\sin\nu^* + \sin\beta^*\sin\alpha^*\cos\sigma\cos\nu^* = -\sin\alpha^*\cos\beta^*\sin\sigma$$

即
$$a\sin\nu^* + b\cos\nu^* = -c \tag{5-7-18}$$

故
$$\cos(\chi+\nu^*) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\chi &= \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\cos\chi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{5-7-19}
$$

可求出 χ.

当已知 $(\chi+\nu^*)=\arccos\left(\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，可以求出 ν^*，而

$$\sin\psi^* = \cos\alpha^*\cos\beta^*\sin\sigma - \sin\alpha^*\cos\sigma\sin\nu^* + \sin\beta^*\cos\alpha^*\cos\sigma\cos\nu^*$$

$$(-\pi/2 < \psi^* \leqslant \pi/2) \tag{5-7-20}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi^* &= -\sin\alpha^*\cos\beta^*\sin\theta\cos\sigma + \cos\alpha^*(\sin\theta\sin\sigma\sin\nu^* \\ &\quad + \cos\theta\cos\nu^*) + \sin\alpha^*\sin\beta^*(\sin\theta\sin\sigma\cos\nu^* \\ &\quad - \cos\theta\sin\nu^*) \\ -\sin\varphi^* &= -\sin\alpha^*\cos\beta^*\cos\theta\cos\sigma + \cos\alpha^*(\cos\theta\sin\sigma\sin\nu^* \\ &\quad - \sin\theta\cos\nu^*) + \sin\alpha^*\sin\beta^*(\cos\theta\sin\sigma\cos\nu^* \\ &\quad + \sin\theta\sin\nu^*)\end{aligned}\right\}$$

$$\tag{5-7-21}$$

问题在求 Y^*、Z^* 时需知 ν^*，而求 ν^* 时需知 α^*、β^*，为此需要迭代。因为 $\gamma^*=0$，当 α、β 不大时 ν^* 也不会太大，可以令 $\nu_0^*=0$，或等于当时的 ν 值，求 Y^*、Z^*，进而求 α^*、β^*、ν^*，再以 ν_1^* 进行迭代，直到 $|\nu_{i+1}^*-\nu_i^*|<\varepsilon$ 为止。

⑤限幅问题

因为在计算 φ^*、ψ^*、ν^* 的过程中，$\dot{\gamma}_B^*$、η^* 均计算出，为了对攻角、过载进行限制，使其输入量不超过允许的攻角和允许的过载，可进行如下限幅。设需要的速度方向变化率为 $\dot{\gamma}_{BD}^*$、$\dot{\gamma}_{BT}^*$，攻角、侧滑角为 α^*、β^*，$(\alpha^*)^2+(\beta^*)^2=(\eta^*)^2$，$(\dot{\gamma}_{BD}^*)^2+(\dot{\gamma}_{BT}^*)^2=(\dot{\gamma}_B^*)^2$.

对过载的限幅

若 $W_N=v\dot{\gamma}_B^*\geqslant W_{N\max}$，$W_{N\max}$ 为允许的最大法向加速度，$\bar{\dot{\gamma}}_B=W_{N\max}/v$，$\bar{\dot{\gamma}}_B$ 为 $\dot{\gamma}_B$ 的限幅值。

$$\left.\begin{aligned}\bar{\dot{\gamma}}_{BT}^* &= \dot{\gamma}_{BT}^*\frac{\bar{\dot{\gamma}}_B}{\dot{\gamma}_B^*} \\ \bar{\dot{\gamma}}_{BD}^* &= \dot{\gamma}_{BD}^*\frac{\bar{\dot{\gamma}}_B}{\dot{\gamma}_B^*}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-22}$$

若

$$W_N < W_{N\max}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\dot{\gamma}}_{BT}^{*} &= \dot{\gamma}_{BT}^{*} \\ \bar{\dot{\gamma}}_{BD}^{*} &= \dot{\gamma}_{BD}^{*}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-23}$$

对攻角的限幅

若 $\eta^{*} > \eta_{max}$，η_{max} 为总攻角的最大允许值

$$\left.\begin{aligned}\alpha_c^{*} &= \frac{\eta_{max}}{\eta^{*}}\alpha^{*} \\ \beta_c^{*} &= \frac{\eta_{max}}{\eta^{*}}\beta^{*}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-24}$$

若 $\eta < \eta_{max}$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_c^{*} &= \alpha^{*} \\ \beta_c^{*} &= \beta^{*}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-25}$$

限幅过程示意图如图 5-22 所示。

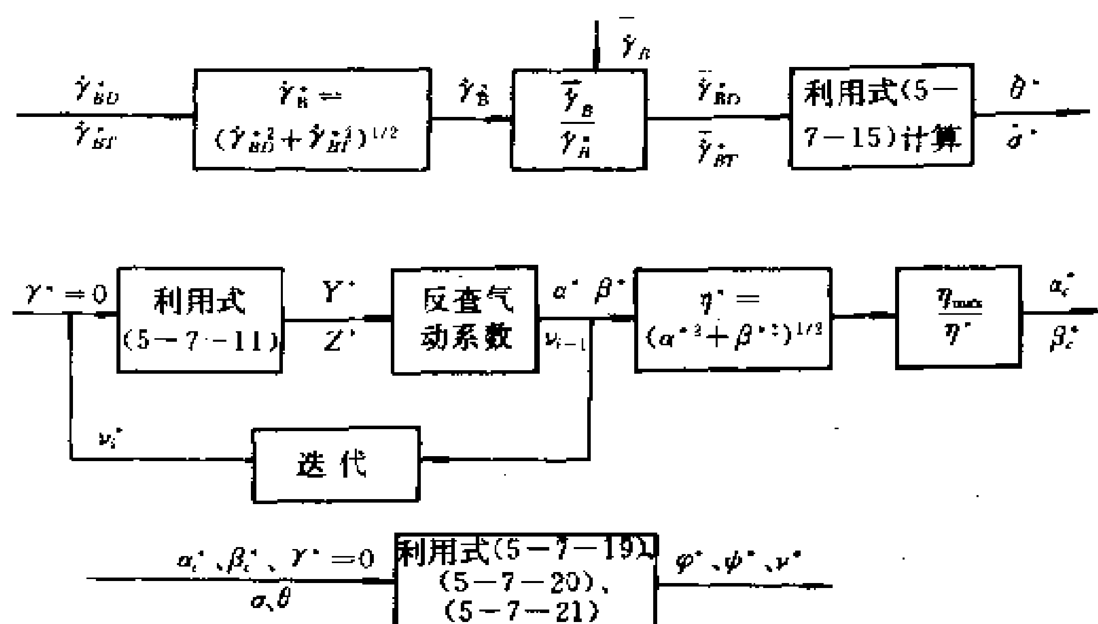


图 5-22　限幅过程示意图

3. 机动弹头六自由度弹道仿真的数学模型

图 5-17 是以视加速度差作误差信号的结构图，图 5-18 是以

姿态角之差作误差信号的结构图，两图中 $\dot{W}_a$ 表示机动弹头实际飞行的视加速度，但由于惯导系统存在着误差$\triangle\dot{W}$，所以导航计算用的视加速度 $\dot{W}_c$ 是由$(\dot{W}_a+\triangle\dot{W}_a)$两项加起来的结果。因此在六自由度弹道仿真中，如果考虑惯性器件的误差，除了积分运动方程，模拟机动弹头运动参数的变化外，还应进行导航计算，以求出相关的参数。如通过导航计算形成制导指令，计算出有惯性器件误差时的机动弹头的视加速度和角姿态测量值。

机动弹头的再入飞行轨道，既有接近水平飞行的阶段，也有接近垂直飞行的末段，因此为了更好的描述其运动，其欧拉角应有不同的转动次序，即既要建立先俯仰、再偏航、后滚动情况下的动力学方程及其辅助关系，又要建立先偏航、再俯仰、后滚动情况下的动力学方程及其辅助关系。为了简化下面只建立先俯仰、再偏航、后滚动的动力学方程及其辅助关系。

(1)质心运动方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{v} &= R_{xh}/m + g_{xh}\\ \dot{\theta} &= (R_{yh}/m + g_{yh})/(v\cos\sigma)\\ \dot{\sigma} &= -(R_{zh}/m + g_{zh})/v\\ \dot{x} &= v\cos\theta\cos\sigma\\ \dot{y} &= v\sin\theta\cos\sigma\\ \dot{z} &= -v\sin\sigma\end{aligned}\right\}\tag{5-7-26}$$

其中 R_{xh}、R_{yh}、R_{zh}是空气动力 R 在半速度坐标系上的投影；

g_{xh}、g_{yh}、g_{zh}是重力加速度在半速度坐标系上的投影。

(2)机动弹头绕质心转动方程

因为不考虑地球旋转，绝对角速度 ω_T 等于相对角速度 ω，且认为 $o_1\text{-}x_1y_1z_1$ 的各轴为主惯轴，由式(2-4-30)可得：

$$
\left.\begin{aligned}
I_x\dot{\omega}_{x1} &= M_{x1} - (I_z - I_y)\omega_{z1}\omega_{y1} \\
I_y\dot{\omega}_{y1} &= M_{y1} - (I_x - I_z)\omega_{x1}\omega_{z1} \\
I_z\dot{\omega}_{z1} &= M_{z1} - (I_y - I_x)\omega_{y1}\omega_{x1} \\
\dot{\varphi} &= (\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma)/\cos\psi \\
\dot{\psi} &= \omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma \\
\dot{\gamma} &= \omega_{x1} + \mathrm{tg}\psi(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma)
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}28)
$$

其中 M_{x1}、M_{y1}、M_{z1} 为气动力矩和控制力矩在弹体坐标系上的投影。

(3)制导方程

机动弹头制导方程由导引规律和减速规律两部分组成。

导引方程

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\gamma}_D &= K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{LD}(\lambda_D + \gamma_{DF})/T_g \\
\dot{\gamma}_T &= K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}29)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_D &= \mathrm{arctg}(y/\sqrt{x^2 + z^2}) \\
\lambda_T &= \mathrm{arctg}(-z/x)
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}30)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda}_D &= v_\eta/\rho \\
\dot{\lambda}_T &= -v_\zeta/(\rho\cos\lambda_D) \\
\rho &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\
T_g &= \rho/v_\xi
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}31)
$$

$$
\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = S_O \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5\text{-}7\text{-}32)
$$

减速控制规律

$$
\dot{\gamma}_B = K_1\{\rho v[K(-\dot{\rho}/\rho)(v - v^*)/v + |A_{xi}|/v]\}^{1/2} \quad (5\text{-}7\text{-}33)
$$

$$
v^* = \begin{cases} v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})]^c + \Delta v_p & \text{当 } h \geqslant h_c \\ v_F[1 + æ(1 - e^{-\beta h})]^c & \text{当 } h < h_c \end{cases} \quad (5\text{-}7\text{-}34)
$$

制导规律

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_{BD} &= \dot{\gamma}_D + \frac{\dot{\gamma}_T}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}_{BT} &= \dot{\gamma}_T - \frac{\dot{\gamma}_D}{\dot{\gamma}_g}\triangle\dot{\gamma}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-35}$$

$$\dot{\gamma}_g = (\dot{\gamma}_T^2 + \dot{\gamma}_D^2)^{1/2} \tag{5-7-36}$$

$$\left.\begin{aligned}\triangle\dot{\gamma} &= \sqrt{\dot{\gamma}_B^2 - \dot{\gamma}_g^2} \qquad \text{当 } |\dot{\gamma}_B| \geqslant |\dot{\gamma}_g| \\ \triangle\dot{\gamma} &= 0 \qquad \text{当 } |\dot{\gamma}_B| < |\dot{\gamma}_g|\end{aligned}\right\} \tag{5-7-37}$$

当已知导引规律和减速控制规律确定的 $\dot{\gamma}_{BD}$、$\dot{\gamma}_{BT}$，就可以确定制导规律所要求的 $\dot{\theta}^*$、$\dot{\sigma}^*$

$$\dot{\theta}^* = -\dot{\gamma}_{BD}/\cos(\lambda_T - \sigma) \tag{5-7-38}$$

$$\dot{\sigma}^* = [\dot{\gamma}_{BT} - \dot{\gamma}_{BD}\mathrm{tg}(\lambda_T - \sigma)\sin\lambda_D]/\cos\lambda_D \tag{5-7-39}$$

故需要的加速度在半速度坐标系的分量为：

$$A_h^* = (\dot{v}, \quad v\cos\sigma\dot{\theta}^*, \quad -v\dot{\sigma}^*) \tag{5-7-40}$$

(4)误差信号方程

因组成误差信号的方法不同分两种情况

以视加速度差为误差信号

首先将需要的加速度扣除引力加速度得需要的视加速度，并转换到惯性坐标系(目标坐标系)，得在惯性坐标系所需的视加速度

$$\dot{W}_a^* = O_H(A_h^* - g_h) \tag{5-7-41}$$

其中：O_H 为半速度坐标系与目标坐标系间的方向余弦阵；

g_h 为引力加速度在半速度坐标系中的分量。

而弹头的视加速度，即平台系统测量到的视加速度

$$\dot{W}_a = \dot{W}_a + \triangle\dot{W} \tag{5-7-42}$$

$\triangle\dot{W}$ 为根据误差模型得到的视加速的偏差值，若不计惯性器件误差则该项为零，若计入惯性器件误差，则导航计算的参数即 x、y、

z、λ_D、λ_T、$\dot{\lambda}_D$、$\dot{\lambda}_T$，以及由此派生的量均应加上标“′”，以便与弹头的运动参数有区别。

机动弹头一般采用平台系统，此时 $\dot{W}_a$ 的计算可用如下公式。

$$\begin{bmatrix} \triangle \dot{W}_x \\ \triangle \dot{W}_y \\ \triangle \dot{W}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x0} + C_{x1}\dot{W}_{xa} + C_{x2}\dot{W}_{xa}^2 \\ C_{y0} + C_{y1}\dot{W}_{ya} + C_{y2}\dot{W}_{ya}^2 \\ C_{z0} + C_{z1}\dot{W}_{za} + C_{z2}\dot{W}_{za}^2 \end{bmatrix} \tag{5-7-43}$$

式中C_{x0}、C_{y0}、C_{z0}——加速度表与加速度无关的误差系数；

C_{x1}、C_{y1}、C_{z1}——加速度表与视加速度成正比的误差系数；

C_{x2}、C_{y2}、C_{z2}——加速度与视加速度平方成正比的误差系数；

$\dot{W}_{xa}$、$\dot{W}_{ya}$、$\dot{W}_{za}$——分别为视加速度沿平台坐标系 x_a、y_a、z_a 三轴的分量。

$$\left.\begin{aligned} \dot{W}'_{xa} &= \dot{W}_{xa} + C_{x0} + C_{x1}\dot{W}_{xa} + C_{x2}\dot{W}_{xa}^2 \\ \dot{W}'_{ya} &= \dot{W}_{ya} + C_{y0} + C_{y1}\dot{W}_{ya} + C_{y2}\dot{W}_{ya}^2 \\ \dot{W}'_{za} &= \dot{W}_{za} + C_{z0} + C_{z1}\dot{W}_{za} + C_{z2}\dot{W}_{za}^2 \end{aligned}\right\} \tag{5-7-44}$$

将实际测量到的视加速度 $\dot{W}_a$ 与需要的视加速度 $\dot{W}_a^*$ 相减，便可以得到在平台坐标系内的误差信号。但俯仰、偏航通道要求的是在弹体坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 内的误差信号，因此要将误差信号，由平台坐标系转换到弹体坐标系。

由于惯性导航系统的陀螺存在着漂移和平台系统存在着角偏差，平台坐标系对惯性坐标系存在着角误差，下面给出误差模型。

平台系统陀螺仪表的测角误差角速度为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha}_{nx} &= C_{gox} + C_{g11x}\dot{W}_{xa} + C_{g12x}\dot{W}_{za} + C_{g2x}\dot{W}_{xa}\dot{W}_{za} \\ \dot{\alpha}_{ny} &= C_{goy} + C_{g11y}\dot{W}_{za} + C_{g12y}\dot{W}_{ya} + C_{g2y}\dot{W}_{za}\dot{W}_{ya} \\ \dot{\alpha}_{nz} &= C_{goz} + C_{g11z}\dot{W}_{ya} + C_{g12z}\dot{W}_{xa} + C_{g2z}\dot{W}_{xa}\dot{W}_{ya} \end{aligned}\right\} \tag{5-7-45}$$

式中 C_{gox}、C_{goy}、C_{goz}——陀螺与视加速度无关的漂移误差系数；

C_{g11x}、C_{g11y}、C_{g11z}——陀螺与视加速度成正比的漂移误差系

数；

C_{g12x}、C_{g12y}、C_{g12z}——陀螺与视加速度成正比的漂移误差系数；

C_{g2x}、C_{g2y}、C_{g2z}——陀螺与视加速度平方成正比的漂移误差系统。

而平台的漂移角误差为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{px} &= C_{pox} + C_{p11x}\dot{W}_{ya} + C_{p12x}\dot{W}_{za} \\ \alpha_{py} &= C_{poy} + C_{p11y}\dot{W}_{xa} + C_{p12y}\dot{W}_{za} \\ \alpha_{pz} &= C_{poz} + C_{p11z}\dot{W}_{xa} + C_{p12z}\dot{W}_{ya} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}46)$$

式中 C_{pox}、C_{poy}、C_{poz}——平台与视加速度无关的漂移误差系数；

C_{p11x}、C_{p11y}、C_{p11z}——平台与视加速度成正比的漂移误差系数；

C_{p12x}、C_{p12y}、C_{p12z}——平台与视加速度成正比的漂移误差系数。

整个平台系统测量角误差为：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_{px} + \alpha_{nx} \\ \alpha_y &= \alpha_{py} + \alpha_{ny} \\ \alpha_z &= \alpha_{pz} + \alpha_{nz} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}47)$$

将平台系统测量角误差转换到弹体坐标系的角误差，可以得：

$$\left.\begin{aligned} \triangle\varphi &= \alpha_z \\ \triangle\psi &= \alpha_y\cos\varphi - \alpha_x\sin\varphi \\ \triangle\gamma &= \alpha_x\cos\varphi + \alpha_y\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}48)$$

故

$$\begin{bmatrix} \triangle\dot{W}'_{x1} \\ \triangle\dot{W}'_{y1} \\ \triangle\dot{W}'_{z1} \end{bmatrix} = B_O(\varphi + \triangle\varphi, \psi + \triangle\psi, \gamma + \triangle\gamma) \begin{bmatrix} \triangle\dot{W}'_{xa} \\ \triangle\dot{W}'_{ya} \\ \triangle\dot{W}'_{za} \end{bmatrix} \quad (5\text{-}7\text{-}49)$$

$$\begin{bmatrix} \triangle \dot{W}'_{xa} \\ \triangle \dot{W}'_{ya} \\ \triangle \dot{W}'_{za} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{W}'_{xa} - \dot{W}^*_{xa} \\ \dot{W}'_{ya} - \dot{W}^*_{ya} \\ \dot{W}'_{za} - \dot{W}'_{za} \end{bmatrix} \tag{5-7-50}$$

以姿态角差为误差信号

求需要的姿态角。假定选取$\gamma^*=0$的方案，则由式(5-7-20)和式(5-7-21)可以计算得到φ^*和ψ^*。

而弹头的实际姿态角可由平台系统测量出，在六自由度弹道仿真时可用姿态角的计算值加上误差角，即$\varphi'=\varphi+\triangle\varphi,\psi'=\psi+\triangle\psi,\gamma'=\gamma+\triangle\gamma$，其误差信号为

$$\left.\begin{aligned} \triangle\varphi' &= \varphi' - \varphi^* \\ \triangle\psi' &= \psi' - \psi^* \\ \triangle\gamma' &= \gamma' - \gamma^* = \gamma' \end{aligned}\right\} \tag{5-7-51}$$

(5)姿态控制方程

以视加速度差为误差信号的姿态控制方程

前面已讨论了其设计方法，在六自由度弹道仿真中，姿态控制系统单独为一模块，有其自身的仿真结构，作为六自由度弹道仿真的一个环节只要给出控制系统所需的输入参量，通过调用控制模块，可以得到舵偏角的大小，其方程如下：

$$\left.\begin{aligned} \delta_\varphi &= \delta_\varphi(\dot{W}^*_{ya}、\dot{W}'_{ya}、v、\theta、\sigma、x、y、z\cdots) \\ \delta_\psi &= \delta_\psi(\dot{W}^*_{za}、\dot{W}'_{za}、v、\theta、\sigma、x、y、z\cdots) \\ \delta_\gamma &= \delta_\gamma(\gamma^*、v、\theta、\sigma、x、y、z\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{5-7-52}$$

以姿态角差为误差信号的姿态控制方程

$$\left.\begin{aligned} \delta_\varphi &= \delta_\varphi(\varphi^*,\varphi',\dot{\varphi}) \\ \delta_\psi &= \delta_\psi(\psi^*,\psi',\dot{\psi}) \\ \delta_\gamma &= \delta_\gamma(\gamma^*,\gamma',\dot{\gamma},\ddot{\gamma}) \end{aligned}\right\} \tag{5-7-53}$$

(6)辅助方程

六自由度弹道仿真与三自由度弹道仿真的区别在于：三自由

度弹道仿真直接由导引规律、减速规律决定 α、β、ν；而六自由度弹道仿真由转动方程计算出姿态，决定 φ、ψ、γ，加上质心运动确定的 θ、σ，利用式(2-3-91)

$$B_H(\alpha,\beta,\nu) = B_O(\varphi,\psi,\gamma)O_H(\theta,\sigma) \tag{5-7-54}$$

确定 α、β、ν。

其具体表达式见式(2-3-92)、(2-3-93)和式(2-3-94)。

§5.7.2 机动弹头六自由度弹道仿真及精度分析

1. 机动弹头六自由度弹道仿真的目的

§5.7.1 已讨论过机动弹头六自由度弹道仿真的特点，并建立了机动弹头六自由度弹道仿真的数学模型。当给出必需的原始参数和误差的大小，便可以进行弹道仿真和精度分析。

机动弹头六自由度弹道仿真和精度分析可以研究两方面的问题，一方面是验证现有系统的合理性，另一方面是对各系统参数提出指标要求。

机动弹头六自由度弹道仿真的目的是：

(1)验证姿态控制系统、舵机设计的合理性

机动弹头姿态控制系统(简称姿控系统，下同)设计，目前仍采用线性化、固化系数法按三个通道分别进行设计，而实际系统是非线性系统、且相互间有交连，通过六自由度的弹道仿真可以对所设计的姿态控制系统进行检验，验证其设计的合理性，同时也可以对其设计参数进行必要的修改。

(2)验证现有的导引、减速制导规律是否合理

机动弹头六自由度弹道仿真时，由于 α、β 并非三自由度弹道仿真时随时达到要求的值，而是有延迟，所以要对三自由度弹道仿真得到的导引、减速制导规律进行验证，研究其在六自由度弹道仿真时是否合适，能否实现基本上沿三自由度仿真确定的弹道飞行，必要时要对其参数进行修改。

(3)验证匹配高度、飞行程序的合理性

机动弹头为提高突防能力和命中精度，一方面机动弹头再人大气层后作机动飞行，根据导引和减速规律对机动弹头进行制导，以躲避对方的拦截，攻击目标；另一方面在惯性导航的基础上，加上雷达匹配定位系统来实现精确定位，以减小由惯导系统中的位置指示偏差带来的落点偏差。

当机动弹头再人到匹配高度时，惯导系统给出机动弹头的指示位置值，以确定机动弹头所在区域，并提取该区域的预存图 Y 与雷达获取的实时图 X 进行匹配计算，将得到的匹配位置作为机动弹头获取实时图 X 时的实际位置，回输到惯导系统中，取代原有的位置指示参数。在匹配正常时，匹配给出的位置是十分接近实际位置的，其精度取决于匹配图像分辨率大小，能起到修正位置指示参数的作用，使导航系统给出较正确的制导控制指令，确保机动弹头落点精度。

机动弹头在 10km、8km、6km 高度进行三次匹配定位、相应高度雷达的分辨率为：

匹配高度(km)	10.00	8.00	6.00
分辨率(m)	120.0	90.0	75.0

另外机动弹头再人过程中还有许多约束条件，例如飞行到某一高度，机动弹头要基本上垂直地面；首次匹配时，当地俯仰角有一定要求等，由此形成的飞行程序是否合理也需要通过六自由度弹道仿真进行检验。

(4)根据总的精度要求，在精度分析的基础上进行精度分配

机动弹头六自由度弹道仿真一方面可以根据给定的误差进行精度分析，反过来根据总的落点精度要求，也可以对各分系统进行精度分配。

(5)提出姿态控制系统、包括舵机的指标要求

六自由度弹道仿真，对设计好的姿态控制系统可以对其合理性进行检验，反过来也可以对姿态控制系统指标提出要求。姿态控制系统重新设计，再通过六自由度弹道仿真进行验证，反复调整设计参数是必不可少的。

(6)提出对惯导器件的误差要求

为了得到导引和减速的信号，必须进行制导计算，实时求出运动参数测量值是必需的，即必须进行导航计算以确定机动弹头的位置和速度。机动弹头导航计算通常是由平台惯导系统来完成。平台惯导系统的视加速度表、平台和陀螺系统存在着误差，计算由惯性器件误差引起的导航误差是机动弹头六自由度弹道仿真十分重要的任务。反过来也可以根据精度分配的要求，对惯性器件精度提出要求。

(7)提出对总体设计参数偏差和气动参数偏差的反要求。

机动弹头六自由度弹道仿真可以根据总体设计参数偏差、气动参数的偏差，计算这些参数偏差对落点运动参数的影响，特别是对落点精度的影响，反过来也可以根据总的精度要求，对总体设计参数偏差和气动参数偏差提出反要求，要求其参数偏差限定在某一定范围之内。

从机动弹头六自由度弹道仿真特点和目的可以看出，随着导弹技术和计算机技术的发展，设计人员已不满足只用三自由度弹道仿真进行导引和减速规律设计，也不满足制导、导航和姿控系统分别进行设计研究，而是将动力学方程、制导方程、误差方程和姿态方程放在一起进行研究设计，这种设计方法在设计部门称为制导、导航和姿控系统一体化设计。制导、导航和姿控系统一体化设计随着计算技术的发展，逐步在系统设计中得到了应用。

虽然为了计算收敛且得到较准确的计算结果，机动弹头六自由度弹道仿真其计算步长要小到几毫秒，例如 2ms，但因目前计算速度很快，计算一条六自由度的弹道，并不很困难，这就为将制导、

导航和姿控系统进行一体化设计创造了条件，因为这种系统更接近实际情况，更可信，也为半实物仿真创造了良好的条件。

2. 机动弹头六自由度弹道仿真

(1)机动弹头六自由度弹道仿真软件编写要求

由于机动弹头六自由度弹道仿真包括了机动弹头的转动方程、姿态控制方程等，除了标准弹道计算外还要进行精度分析，它是一个较大的软件，在编写过程中要求：

①六自由度弹道仿真软件应具有三自由度弹道仿真和六自由度弹道仿真的双重功能，使用者可利用程序中提供的相应的控制变量来加以选择。

②软件采用人机对话方式，提示用户输入各控制变量的值，以确定用户希望计算六自由度弹道还是三自由度弹道。软件操作使用方便。

③整套软件编制采用结构化程序设计方法，将整套软件所需实现的功能，分解成为几十个子功能。每个子功能由一个模块(子程序或函数)来实现，该模块只有一个入口，一个出口，可被其它模块调用。由于采用结构化程序设计方法，整套软件应具有较好的可读性、可维护性，便于用户对软件的修改。

④软件编写要考虑各种误差源。

(2)原始参数和初始条件

进行弹道计算，下列参数和系数应确定。

弹头质量、弹头横截面积、弹头转动惯量、最大法向过载、最大攻角、最大舵偏角、全部气动力和力矩系数、导引和减速规律中的有关参数、姿控系统中的有关参数、各次地图匹配的高度、预存图及其分辨率、全部误差源的大小。

为了进行数值积分必须给出与微分方程个数相同的初始条件。其中质心运动的初始条件同三自由度弹道仿真，而机动弹头转动方程的初始条件要另外给出，即给出三个姿态角(φ、ψ、γ)和姿态

角速度(ω_{x0}、ω_{y0}、ω_{z0})。

(3)机动弹头六自由度弹道仿真

编制好程序,给出初始条件便可以进行弹道仿真。

①六自由度的标准弹道

六自由度的标准弹道就是不考虑任何误差,但要考虑机动弹头转动方程、姿态控制方程,或者简单地说要考虑系统的动态过程。实际的 α、β 达到三自由度仿真时的 α、β 值,在时间上有滞后,两条弹道不完全相同,其典型的六自由度和三自由度弹道示意图如图 5-23 至图 5-26 所示。

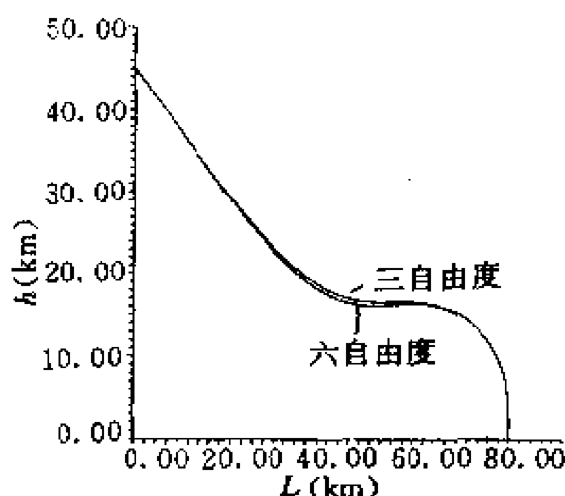


图 5-23 高度 h 与射程 L 的关系

从图 5-23 和图 5-24 可看出,再入开始时,大攻角拉起,六自由度弹道由于 α、β 的延迟,会造成六自由度弹道和三自由弹道小的差异,其余各段六自由弹道和三自由弹道基本吻合。由图 5-25 和图 5-26 看出,α、β 随时间变化三自由度和六自由度的变化趋势相同,不同之处在于六自由度弹道仿真时,α、β 的变化要平缓一些。

从图 5-23 到图 5-26 看出,机动弹头姿态控制系统有较好的动态性能、较强的信号跟踪能力。

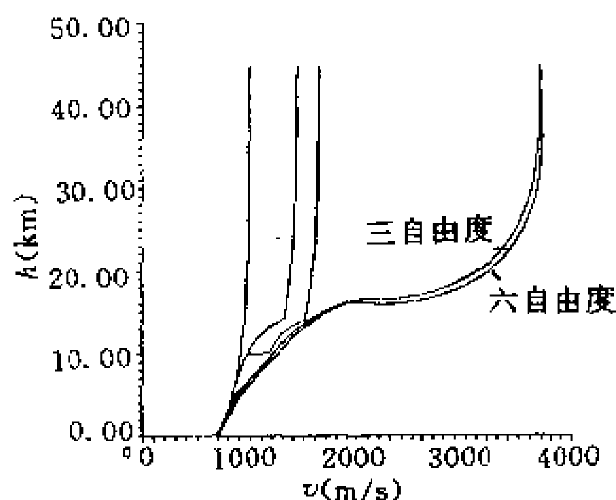


图 5-24 v_E 和 v 随高度 H 的曲线

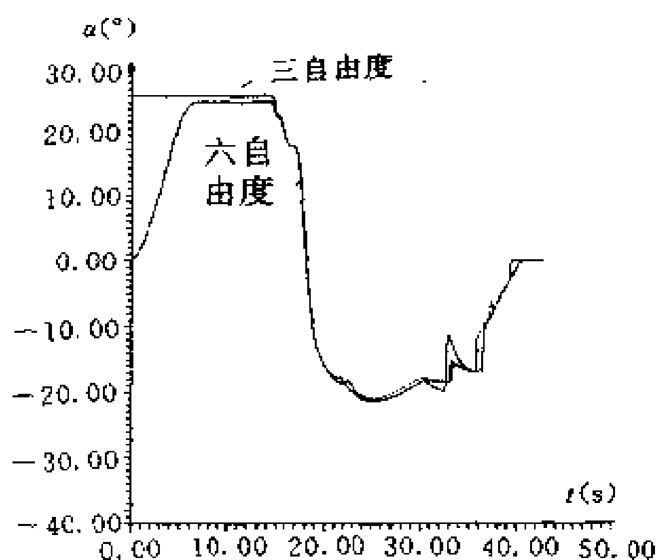


图 5-25 α 随时间 t 的曲线

机动弹头的六自由度运动是通过空气舵来实施控制的，弹道仿真得到的舵偏角 δ_φ 和攻角 α，舵偏角 δ_ψ 和侧滑角 β 的变化规律如图 5-27 和图 5-28 所示。

从图 5-27 可以看出，在俯仰通道内，当 $|\alpha|$ 较大时，机动弹头处于静稳定状态，舵偏角 δ_φ 与攻角 α 符号相反；而当攻角 $|\alpha|$ 较小

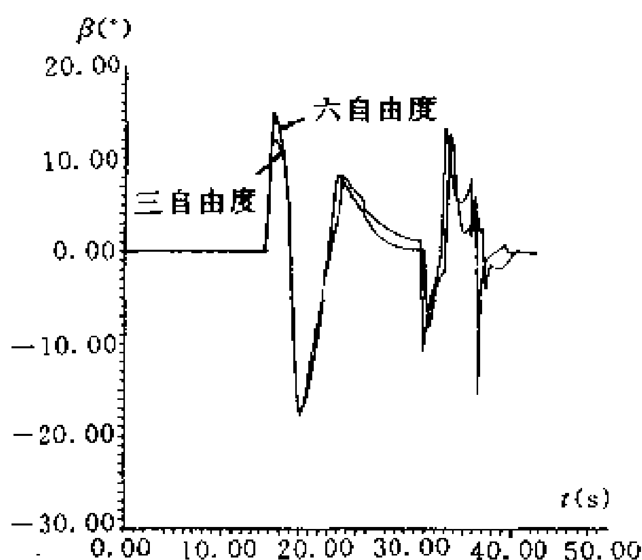


图 5-26 β 随时间 t 的曲线

时，弹头处于静不稳定状态，舵偏角 δ_φ 与 α 符号相同，这说明俯仰通道姿态控制系统设计合理，机动弹头处于静稳定状态和静不稳定状态，都能保证稳定飞行。

同样，偏航通道内也存在着相同的情况。偏航通道设计同样合理可行、满足设计要求。

滚动通道控制系统是控制机动弹头的滚动角，控制所要求的弹体滚动角为零。六自由度弹道仿真如图 5-29，可以看出：滚动角 γ 和舵偏角 δ_γ 很小，系统控制效果很好。

②减速控制参数对落点参数的影响

三自由度弹道仿真时，导引和减速规律要求的 α、β 立即反映出来，只有攻角 α、侧滑角 β 受到最大过载和最大攻角的限制，而在六自由度弹道仿真时，要考虑动态过程，α、β 在时间上有延迟，而且运动参数是连续变化的，这点与三自由度弹道仿真是不同的。这二者之间的差别造成了制导系统中调节参数的不同。导引规律中参数影响不大，主要是减速规律中参数不同，包括理想速度曲线设计参数 æ 与减速控制信号 $\dot{\gamma}_B$ 中的参数 K 和 K_1。

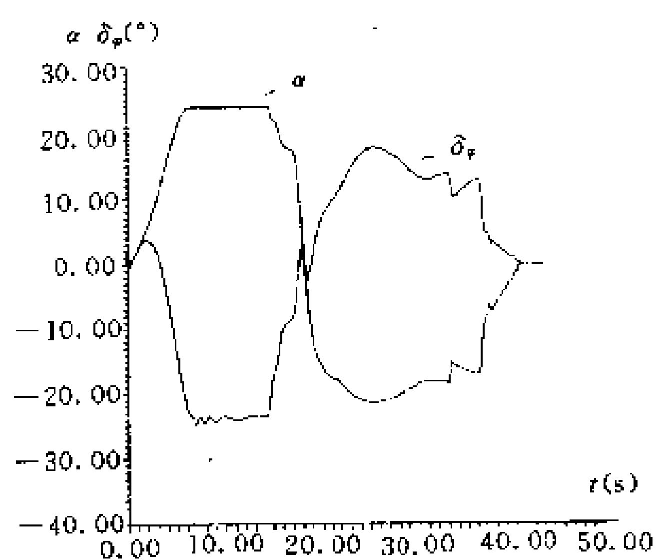


图 5-27　δ_φ 与 $\alpha(t)$ 曲线

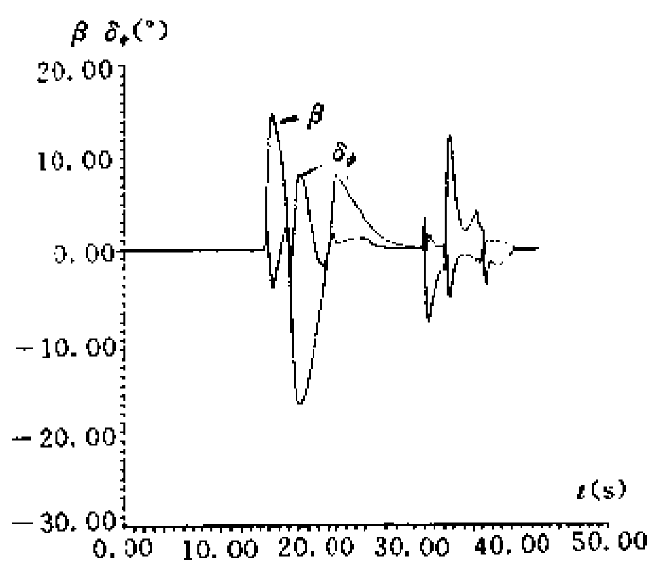


图 5-28　δ_ψ 与 $\beta(t)$ 曲线

对不同组合的参数 æ、K 和 K_1 进行大量仿真可以得到如下看法：

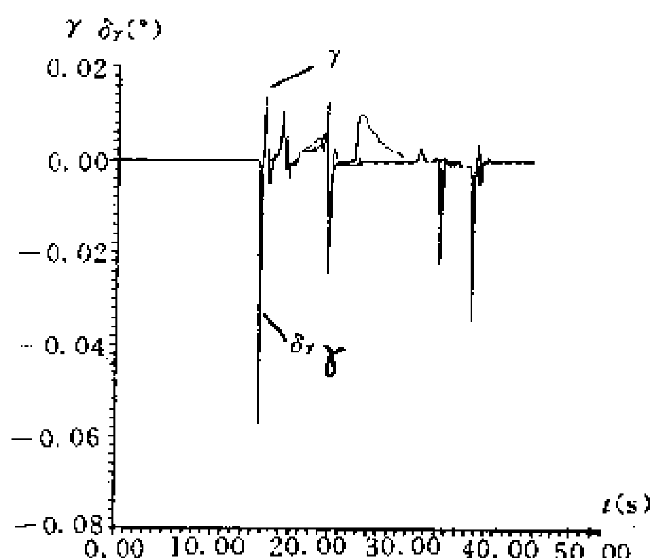


图 5—29 滚动角 γ 与滚动舵偏角 δ_γ 变化曲线

首先，调节参数 æ、K 和 K_1 主要影响落速的大小，对导引影响不大，机动弹头落点参数 θ_F、λ_{DF}、L_F 能满足要求；其次当调节参数 æ 变大时，理想速度 v^* 也相应变大，理想速度曲线变得较为平缓，减速控制信号 $\dot{Y}_B$ 相对减小，机动弹头落速增大；再次 æ、K 和 K_1 的选择应在三自由度弹道仿真的基础上进行修正，重新选择，使其落速满足要求。

③弹道计算步长的选择

机动弹头三自由度弹道仿真只考虑机动弹头的质心运动，而质心运动参数变化较慢，计算步长可用 0.01s，甚至 0.05s。而机动弹头六自由度弹道仿真要考虑弹头的姿态运动和姿态控制系统的动态过程，姿态运动相对于质心运动是一个快速运动，而姿态控制系统各个环节的时间常数也较小，仿真时计算步长取 0.01s 不合适。通过对不同的计算步长进行仿真，得到如下看法：六自由度弹道仿真时，计算步长的大小对落速的大小影响较大，而对其它参数的影响不大，能满足命中精度要求，当仿真时计算步长取 0.001、0.002 和 0.0025s 时，运动参数差别不大，而当计算步长取

0.005s，则有明显差别，特别是侧向参数 β、δ_φ、γ 和 δ_γ 相差较大。为了节省仿真计算时间，又不破坏机动弹道特性，对机动弹头六自由度弹道仿真其计算步长选取 0.0025s 较合适。

3. 机动弹头六自由度弹头仿真的精度分析

机动弹头六自由度标准弹道是在无干扰误差情况下得到的。实际飞行中，由于存在着各种误差，实际弹道落点参数不同于标准弹道，因此有必要分析各种干扰因素对落点精度的影响，它既可以分析各种误差对落点精度的影响，也可以反过来对干扰误差的大小提出量化要求。

(1)误差源的分类

误差源分类可以有不同的方法。机动弹头再入段误差源可以分成：

①交班点参数误差

交班点误差由机动弹头上两部分组成，一部分是由主动段关机点运动参数偏差引起的交班点运动参数偏差，即交班点的速度偏差($\triangle v_x$、$\triangle v_y$、$\triangle v_z$)和位置偏差($\triangle x$、$\triangle y$、$\triangle z$)；另一部分是由惯导工具误差引起的平台系统指示参数偏差，即交班点速度指示偏差($\triangle v_x'$、$\triangle v_y'$、$\triangle v_z'$)和交班点位置指示偏差($\triangle x'$、$\triangle y'$、$\triangle z'$)。

②再入段处干扰误差

再入段处干扰误差主要包括大气密度偏差$\triangle \rho$和空气阻力系数偏差$\triangle C_x$，一般忽略升力和侧力系数偏差的影响。

③侧风的影响

应给出一定的风场，以分析风对落点精度的影响。

④惯导器件工具误差

对平台惯导系统主要有加速度表测量误差、平台系统角漂移误差和陀螺仪表的角速度误差。此类误差共有 30 项，即式(5-7-43)、式(5-7-45)和式(5-7-46)各项误差系数带来的误差。

(2)落点的精度分析

落点位置和速度偏差的统计分析可研究两方面的问题，一方面是各误差的单项影响，另一方面是各误差源的综合影响，下面分别讨论。

①误差源的单项影响

根据每一项误差的大小，分别加入到六自由度弹道仿真数学模型中，取其误差的最大值（3σ 值）进行数值积分，再利用求差法与六自由度标准弹道进行比较，即可得到各单项误差造成落点的最大位置和速度偏差，进一步利用“最大偏差法”可以求得落点位置和速度偏差分布的标准方差

$$\left.\begin{aligned}\sigma_v &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{m}\triangle v_i^2\right)^{1/2}\\ \sigma_\theta &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{m}\triangle \theta_i^2\right)^{1/2}\\ \sigma_x &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{m}\triangle x_i^2\right)^{1/2}\\ \sigma_z &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{m}\triangle z_i^2\right)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{5-7-55}$$

其中$\triangle v_i$、$\triangle \theta_i$、$\triangle x_i$、$\triangle z_i$ 为单项误差造成落点速度大小、方向、纵程和横程偏差，m 表示有 m 个单项误差。

因为每项误差分别进行弹道计算，就可以看出每一项误差对落点运动参数影响的程度。机动弹头六自由度的弹道仿真表明，惯导系统交班点侧向位置指示偏差较大，引起的落点偏差最大，应采取措施提高修正能力，如降低机动弹头要求的垂直高度，使机动弹头匹配时具有较大的剩余射程和速度倾角，即具有较大的机动能力，提高机动弹头的纠偏能力，减小落点偏差。当然减小交班点侧向位置指示偏差也是途径之一，但这将对惯导系统器件提出更高的精度要求，不一定可行。

②误差源的综合影响

首先由蒙特卡洛方法对再入段的 m 个误差源随机抽样，产生 n 组随机误差源

$$\varepsilon_i = [\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{mi}] \quad i = 1, \cdots, n \tag{5-7-56}$$

然后分别进行数值计算，求出在随机干扰作用下的实际弹道，利用求差法与六自由度标准弹道相比较，即可确定落点位置和速度偏差的大量样本 $\triangle v_i, \triangle \theta_i, \triangle x_i, \triangle z_i, i=1,\cdots,n$

根据数理统计理论，即可确定样本的方差

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_v &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\triangle v_i^2\right)^{1/2} \\
\sigma_\theta &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\triangle \theta_i^2\right)^{1/2} \\
\sigma_x &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i^2\right)^{1/2} \\
\sigma_z &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\triangle z_i^2\right)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{5-7-57}$$

用上述两种方法，对某机动弹头的具体参数进行了仿真计算，从仿真结果可知，机动弹头落点位置偏差较小，说明带图像匹配末制导系统的机动弹头对地面固定目标的命中精度较高，而机动弹头的落速大小偏差较大，其主要原因是交班点位置指示偏差较大，如果减小机动弹头惯导系统工具误差，即可减小机动弹头的落速大小偏差。

4．机动弹头六自由度弹道仿真结果分析

①六自由度弹道曲线较三自由度弹道曲线平滑，除大攻角拉起段稍有滞后外，弹道基本上重合，说明制导系统、控制系统设计合理。

②通过对 45 项误差源作用下，系统精度分析，机动弹头位置偏差较小，可满足总体设计要求，说明导引规律设计合理。

③六自由度弹道仿真表明，落点速度大小偏差偏大，除减小交

班点指示位置偏差外，其减速规律仍有待改进。

④三次匹配的雷达分辨率基本上可满足精度要求，减小雷达分辨率，可减小机动弹头的位置偏差。

⑤六自由度弹道仿真，由于 α、β 的延迟，其偏差修正能力低于三自由度弹道仿真时的纠偏能力。

第六章 航天器返回轨道设计和制导方法

§6.1 概述

航天器(spacecraft)是指在地球大气层以外的宇宙空间基本上按照天体力学规律运行的各类飞行器。人造地球卫星、载人飞船、航天飞机和空间探测器都是航天器。航天器可分为进入式航天器和非进入式航天器。执行完任务后要进入行星大气并在行星着陆的航天器叫进入式航天器,而把不进入行星大气并在行星上着陆的航天器称非进入式航天器。把从地球上发射进入太空,完成任务后再入到地球大气层并着陆在地球上的航天器称为返回式航天器,也可称再入式航天器,这是因为在地球上的人看来,这些航天器有再回到地球上的意思,因此把进入地球大气层的过程称为返回过程,也可称为再入过程,把进入地球大气层称为再入大气层。其实这样的区分并不必要,只是为了照顾历史和习惯而已。在本书中,不特别指明,在讨论返回地球大气层的问题时,“进入”、“返回”和“再入”三词通用,“返回”一词更多的是指返回到地球的全过程,而“再入”一词更多的是指再入大气层后再入到地球的过程。航天器中再入地球的部分称再入器。

使航天器脱离原来运行轨道,再入到地球大气层并在地面安全着陆的技术称为航天器再入技术或者航天器返回技术。

航天器再入技术与很多科学技术有关,如航天动力学、空气动力学、防热结构学、控制与导航学、火箭发动机技术、测控技术、回收与着陆技术。它是由上述学科和技术的有关部分组成的一门新

的综合性的边缘学科。

§6.1.1 再入式航天器分类

再入式航天器可以有多种分类方法，例如按是否载人可分为载人航天器和非载人航天器；按任务的不同可分为人造卫星、载人飞船和航天飞机；按用途可分为试验的、考察的和应用的航天器；按是否可重复使用又可分为一次性和多次重复使用的航天器等等。一般地讲，每一种航天器都是为了满足特定需要而设计的，都可以做单独的一类，显然讨论这种分类没有多大意义。

下面不从满足要求的角度，而是从技术上主要的特征差异讨论再入式航天器的分类。这类航天器最重要的特征是航天器要进入大气层，从再入式航天器在再入大气层后的气动特性的不同，再入式航天器可分为三类：

①弹道式再入航天器；

②弹道—升力式再入航天器；

③升力式再入航天器。

习惯上也称为弹道式再入飞行器、弹道—升力式再入飞行器和升力式再入飞行器。

为叙述方便和统一，统称上述三种航天器为再入式航天器（返回式航天器、进入式航天器），而称再入式航天器再入大气层部分为再入器（返回器、进入器），对垂直降落的再入器又称返回舱，如返回式卫星、载人飞船的返回部分。而对水平着陆的再入器又称为轨道飞行器，简称为轨道器。

（1）弹道式再入航天器

弹道式再入航天器是指返回舱在标准情况下再入大气层时，在其上只有阻力作用，不产生升力的航天器。

弹道式再入航天器又可细分为无升力弹道式再入航天器和升力不控制的弹道式再入航天器，前者如美国的第一代载人飞船"水

星”号，后者如我国的返回式卫星。

升力不控制的弹道式再入航天器一般不载人，其再入过载允许达到较高的值。例如，对于只载有仪器的返回式卫星，允许其再入过载峰值约为 $20g$. 另一方面，对再入器的着陆精度的要求也较低，可允许达到几十公里，甚至一百多公里的范围。这样，一般的返回式卫星的再入器大都采用升力不控制的弹道式再入轨道，以简化设计、降低研制和生产费用。这类再入器再入大气层后，其姿态和轨道均不进行控制，再入器以其自身的稳定性，维持其头部朝前的姿态运动或较快地转到头部朝前的姿态运动。

而无升力弹道式再入航天器，除在标准情况下升阻比 L/D 等于零外，还要求实际轨道接近 L/D 等于零的飞行。

在工程上实现无升力弹道再入，一般比实现升力不控制的弹道式再入要复杂和困难，其原因是需要在更多的环节上进行姿态控制。

首先，对于无升力弹道式再入航天器，都必须在返回轨道的过渡段进行姿态控制，以保证再入器以升力为零且对质心气动力矩为零的攻角再入大气层边界。

其次，无升力弹道式再入航天器再入大气层后，也需要姿态控制才能始终维持 $L/D=0$ 的运动状态，尤其对于再入器是动不稳定的情况(如“水星”号飞船)，则不但要在再入器再入大气层前由姿态控制系统将其调整和稳定在以零攻角再入的状态，而且在再入段的全过程，都需要姿态控制系统进行工作，以限制俯仰和偏航速率在一定的范围之内。从工程角度看，再入器的质心虽设计在其纵轴上，但由于测试误差等原因，可能会有质心横移，由于加工原因，再入器的气动外形可能会不对称，当然如果防热系统设计不完善，气动烧蚀更会造成气动外形不对称，这样再入器在大气层中飞行时就会产生一个随机的平衡攻角和升力，为了不使这个随机升力影响再入轨道的运动参数和落点，可以由姿态系统在再入器再

入前提供一定的、不大的再入滚动速率，例如美国的“水星”号飞船的再入器在再入大气层前，达到一个俯仰角为1.5°的再入姿态，然后，保持这个姿态，直到经受0.05 g 的负加速度为止，即以零攻角再入大气层。飞船的再入器再入大气层时，由再入器上的姿态控制系统给再入器提供10°/s 的再入滚动速率，以减小着陆点散布，并且在再入期间由姿态控制系统限制俯仰和偏航速率的振荡不大于2°/s。这样，才会保证再入器以较低的角振荡速率和较小的着陆点散布，实现弹道式再入轨道返回地面。

弹道式再入航天器由于升阻比 $L/D=0$，再入器在大气层内的运动无控制，再入轨道由再入点位置、再入速度大小 v_e 和方向 Θ_e 所决定，而再入状态是由过渡段轨道决定，过渡段轨道又由制动段的制动点位置和制动参数所决定。因此一旦制动点位置和制动参数确定后，整个返回轨道便确定了，是无法调整的，这样运行轨道的偏差、制动点位置偏差、制动姿态的偏差、制动参数的偏差、质量偏差和气动系数偏差等都会造成落点参数很大的偏差，使着陆点有很大的散布。此外由第三章讨论知，弹道式再入减速快，最大过载值和最大热流值高，理论上讲为了减小最大过载和最大热流，可以减小再入角和再入速度，但实际上用减小再入速度的办法来减小最大过载和最大热流是不可取的。因为再入速度的减小有赖于制动速度的增大，这将使制动火箭的总冲增加。所以控制弹道式再入最大过载的主要办法就是控制再入角。例如为了使航天员所承受的过载值不超过容许值8～10 g，再入角大小要控制在3°以下，这对制动离轨段的要求是很高的。弹道式再入航天器由于无升力其再入走廊也很狭窄(再入走廊的定义见§6.1.4)。

尽管弹道式再入航天器存在落点散布大和再入走廊狭窄等主要问题，但由于再入大气层不产生升力或不控制升力，再入轨道比较陡峭，所经历的航程和时间较短，因而气动加热的总量也较小，防热问题相对而言较易处理，此外它的气动外形也不复杂，可做成

简单的旋成体。上述两点都使它的结构和防热设计大为简化，因而成为载人飞船最先采用的一种再入方式。

根据弹道式再入航天器再入轨道的特点，它们的着陆方式属垂直着陆类，它们的着陆系统采用降落伞着陆系统，采用这种着陆系统，着陆时有相当大的冲击过载。如果要减小冲击过载，在着陆系统上要增加缓冲装置，但这样做会增加航天器的质量和复杂性。

(2)弹道--升力式再入航天器

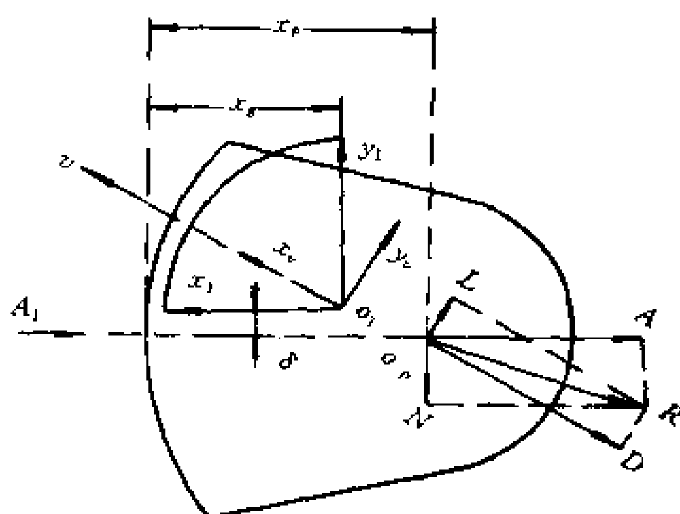


图 6-1 以配平攻角飞行时的空气动力

在弹道式再入航天器的基础上，通过配置再入器质心的办法，使再入器再入大气层时产生一定的升力，这种再入方式为弹道—升力式再入，采用弹道—升力式再入的航天器，其质心不配置在再入器的中心轴线上，而是配置在偏离中心轴线一小段距离的地方，这样配置质心，使再入器再入大气时产生一个不大的攻角，同时产生一个不大的升力，如图 6-1 所示。由这样偏离中心轴线配置质心在平衡状态下产生的攻角 η 称为配平攻角，所产生的升力一般不大于阻力的一半，即升阻比 C_L/C_D 小于 0.5.

与弹道式再入相比，有一定升力的再入器，可以利用其升力增大再入走廊的宽度，改善再入状况。在相同的再入条件下，增大升

阻比还可以减小最大过载值和降低最大热流。这些在第三章已详细讨论过。此外，弹道—升力式再入的航天器，在再入段通过滚动控制可以改变升力矢量的方向，从而能在一定的程度上调整再入器在大气中的轨道，使再入器有一定的机动飞行能力，这样可以大大减小再入器的着陆点散布，有可能将再入器的着陆点控制在一定的区域内。美国的"双子星座"号飞船首次采用了弹道—升力式再入方式，飞船可以在纵向 1200km，横向 110km 的范围内调整着陆点。与采用弹道式再入的"水星"号载人飞船比较，"双子星座"飞船的返回性能大大改善，再入角由 3°增大到 7°，最大过载由 10g 下降到 5g 以下，着陆点散布从百公里级下降到十公里级。

由于采用弹道—升力式再入的再入器既保持了弹道式再入航天器结构简单和防热易于处理的特点，又能适当的利用升力，在一定程度上克服了弹道式再入的缺点。因此，在需要降低最大减速过载和减小着陆点散布的场合下，弹道—升力式再入方式被广泛采用。在"双子星座"号以后的飞船均采用弹道—升力式再入方式，而且可以预计，未来的载人飞船或类似载人飞船的再入器（如轨道救生艇）也将采用弹道—升力式再入方式。

弹道—升力式再入器产生的升力不大，还不能使再入轨道的着陆段平缓到可以使再入器水平着陆的程度。因此，和弹道式再入航天器一样，这种再入器也是垂直着陆再入器，着陆系统也是降落伞着陆系统。

（3）升力式再入航天器

当要求再入器水平着陆时，必须给再入器足够大的升力，使再入轨道，特别是着陆段平缓到适合水平着陆的程度。再入器升力增大和再入段可调整升力，可以增加机动飞行的能力。平缓的再入段和大范围的机动飞行能力，使再入器水平着陆和着陆到指定的机场跑道上成为可能。

要求再入器水平着陆是为了回避垂直着陆的两大缺点，即往

往造成再入器及其有效载荷损伤的着陆冲击过载和令人困扰的不易控制的落点散布。克服垂直着陆的这两大缺点，过去还没有找到适当的途径和办法。最近虽然提出了一些办法，例如采用可控翼伞，但也还不够成熟。要求再入器水平着陆的目的，在于实现无损的和定点的着陆、为再入器多次重复使用创造条件。迄今没有一个水平着陆的再入式航天器不是多次重复使用的。

能够实现水平着陆的升力式再入器的升阻比一般都大于 1，也就是说再入器在再入段的升力大于阻力，这样大的升力不能再用偏离对称中心轴线配置质心的办法获得。因此升力式再入器不能再用旋成体，只能采用不对称的升力体，升力体又可分为带翼和不带翼两种，都能产生大于 1 的升阻比，但是不带翼的升力全靠形体产生，会使形体复杂化、增大尺寸和质量，因此对航天器而言一般不用。现有的和正在研制的升力式再入器，都是带翼的升力体，形状和飞机类似。图 6-2 所示的是美国空间运输系统(航天飞机)的可多次重复使用的轨道飞行器，简称轨道器(Orbiter)，它是一个带翼的升力式再入器，主要由机翼产生升力，并控制该升力以完成它的机动飞行、下滑和水平着陆。

升力式再入器由于再入段比较平缓，进入段航程和飞行时间都比弹道式和弹道—升力式再入器长得多，虽然最大热流值和最大减速过载都小，但总的加热量大且作用时间长。此外这种再入器构形比弹道式的复杂得多，再加上多次重复使用的要求，使得这种再入器的气动力问题、防热问题和结构问题变得十分复杂，这些问题是设计这种再入器的关键，为此要付出很大的代价。

§6.1.2 航天器的返回过程

航天器从环绕地球的运行轨道返回地面，要经历以下五个阶段，也有的分为四个阶段，其示意图如图 6-3 所示。

现按五个阶段进行讨论，图 6-3 中，o' 为航天器在运行轨道上

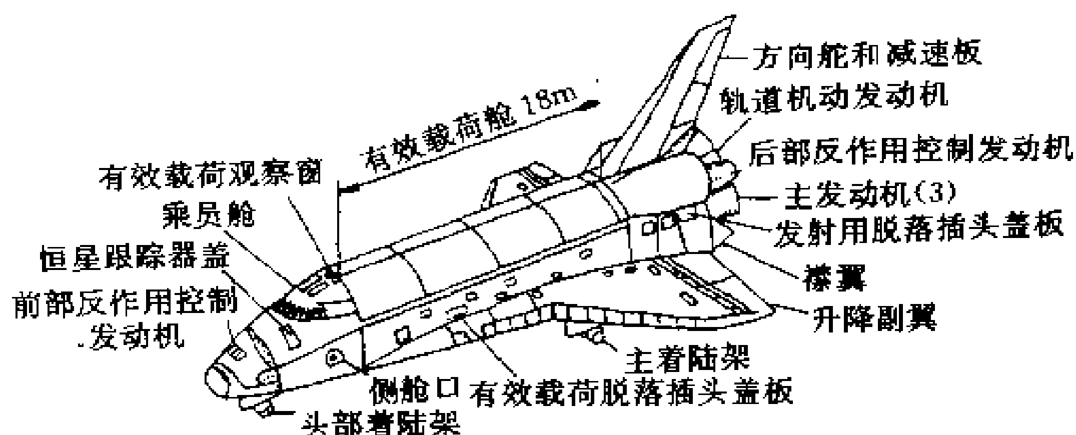


图 6-2 美国空间运输系统的轨道飞行器

的调姿起始点，o 为制动点，P 为制动火箭工作结束点，e 为再入到大气层的再入点，f 为开伞点，c 为着陆点。

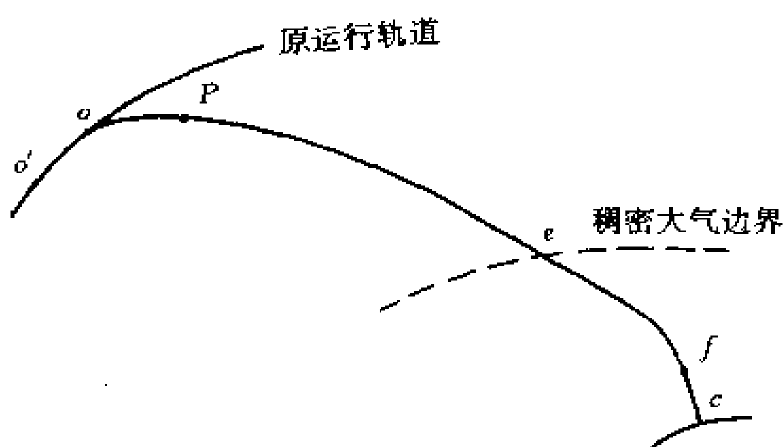


图 6-3 返回再入轨道示意图

1. 制动前的调姿段

再入式航天器在地球引力作用下的运行轨道是不与地球稠密大气层相交的椭圆轨道或圆轨道。在运行轨道上，航天器的姿态是根据它的功能需要决定的，在可能的情况下，希望保持攻角为零的

状态，以减小阻力，从而减小轨道周期的变化。一般航天器的运行姿态不是制动姿态，因此，在制动前的 $o'-o$ 这一飞行段要进行姿态调整，使再入式航天器在制动点 o 时的姿态为制动姿态，即制动火箭工作时要求的姿态。通常这一姿态是满足某一性能指标的最佳姿态。此外，当再入式航天器的不返回部分要留在轨道上继续运行，或扔在太空成太空垃圾时，还要将航天器姿态调整到适合不返回部分与返回部分分离的状态，分离之后再调整到制动状态，这一过程在 $o'-o$ 这一轨道运行段完成。

2. 制动段

该段也称离轨飞行段。该段从制动火箭发动机开始工作点 o（即制动点）到其工作结束点 P 止，即 $o-P$ 段。在这一段飞行时，航天器除受地球引力作用外，还受到制动火箭发动机推力的作用，从而离开原来的运行轨道进入一条引向地面的轨道。

航天器返回地面，必须要用制动发动机产生的推力减小航天器的飞行速度，或者改变其速度方向，或者同时改变速度大小和方向。为了说明制动速度的概念，假定在制动发动机推力作用下，速度的改变是瞬时完成的，如图 6-4 所示。在图 6-4 中，由于制动火箭发动机推力的作用，航天器的速度由原来的轨道速度 v_0 改变为 v_1，Δv 为附加速度，从量值上比较，Δv 比 v_0 小得多，v_1 一般小于 v_0，所以 Δv 又称为制动速度，Δv 与当地水平组成的角 φ_z 称为制动角，图中 $\varphi_z<0$，一般情况下，制动发动机产生的推力矢量与航天器的纵轴重合，因此可以通过制动前的调姿段对航天器姿态进行调整获得制动角。

实际上由于推力大小的限制，制动不可能瞬时完成，制动速度 Δv 的获得需要一定的工作时间，只是制动火箭的工作时间相对来说很短。在有限推力作用下，制动发动机对航天器轨道的作用通常由推力的大小、推力方向和工作时间这三个因素来描述。在发动

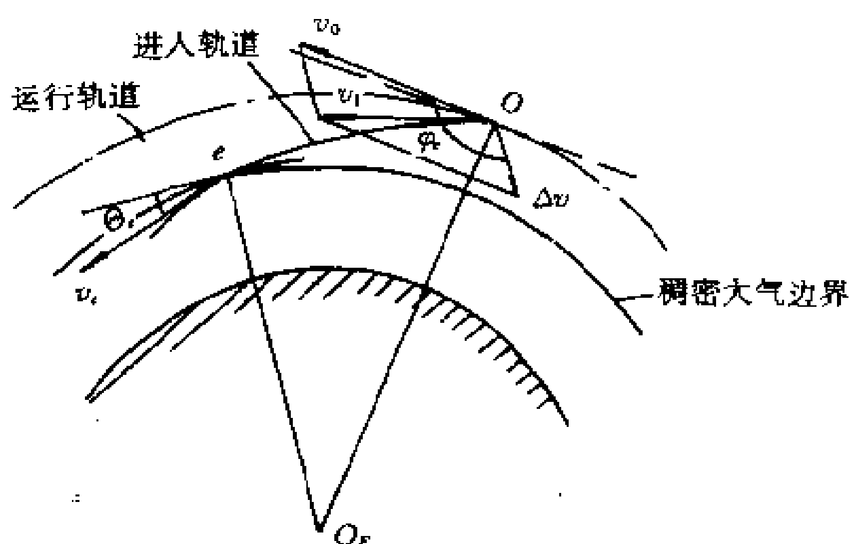


图 6-4 制动速度 Δv

机工作期间推力矢量的方向是用姿态控制系统或自旋稳定方法，使推力矢量保持在制动方向上。用自旋方法维持制动姿态的航天器，在脱离运行轨道之后，还要消旋，其目的在于使再入器进入大气层后能利用气动力的作用，按设计要求把防热结构稳定在朝前迎气流的姿态上。用姿态控制系统维持制动姿态的再入器，在再入大气层之前也要把姿态调整到设计的再入姿态，也就是防热结构迎气流的姿态。

制动段为返回轨道中的动力飞行段，对制动段轨道设计和制导的任务有以下三个内容：

1）制动点位置的建立，即制动点的地心纬度 ϕ_0（或大地纬度 B_0）、经度 λ_0。

2）制动参数的选择，包括制动发动机推力矢量 P 的大小、推力方向 φ_k 和工作时间 t_p。

3）制动段关机方程的建立，在实际飞行中，确定制动发动机的

关机时刻。

3. 过渡段

该段也称为大气层外自由飞行段。该段从制动火箭发动机工作结束点 P 到再入地球大气层边界的 e 点，即 $P-e$ 段。所谓大气层边界是不存在的，只是人为的划分，一般地球大气层边界高度取为 80 ～ 120 km，在过渡段航天器的质心轨道一般不加以控制(但姿态要进行控制)，航天器仅在地球引力下作自由下降飞行。

过渡段轨道可由航天器在 P 点的速度、位置和在地球引力作用下自由飞行段的运动规律求得，当航天器到达 e 点时，速度 v_e 称为再入速度，v_e 与当地水平面所成的夹角 Θ_e 称为再入角，如图 6-5 所示。

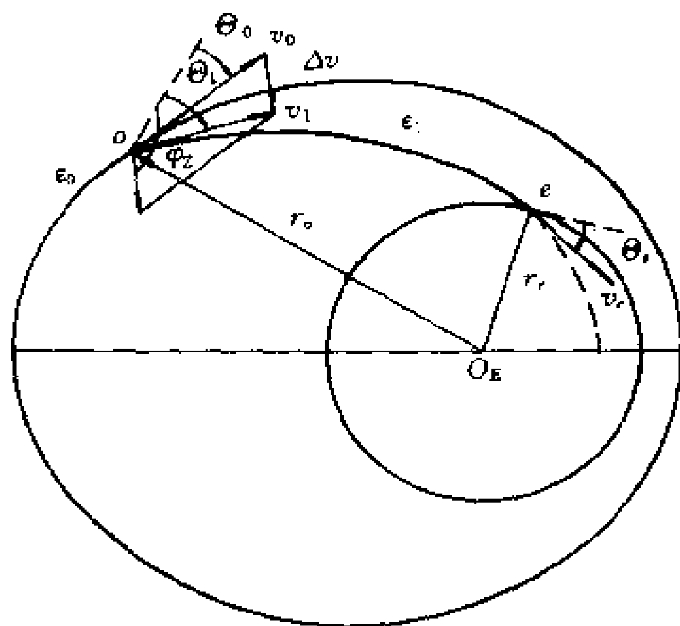


图 6-5 返回轨道的过渡段

航天器的再入状态，即再入点 e 的位置、再入速度 v_e 和再入角 Θ_e，对航天器能否安全返回有决定性的影响。所谓安全返回指的是在假定着陆系统工作正常条件下，航天器能够在再入走廊内进入大气层，通过大气层时的最大过载及其持续时间在规定的范围之

内，产生的热量不会损坏再入器，以及再入器能在指定的区域内着陆。

当给定一个适当的再入速度 v_e，或再入角 Θ_e，或航程角 δ_{oe}（即给定再入点 e）时，都可以从制动点 o 算出满足安全返回条件的制动段和过渡段轨道。从前面的讨论知 Θ_e 的大小与最大过载、最大热流和总吸热量有直接关系。要通过对制动段参数的选择来满足对 Θ_e 的要求。

4. 再入段

再入段是指从再入点 e 到着陆段开始工作的起点 f 这一段轨道。再入点 e 是空气动力起明显作用的稠密大气层的最高点，从这点开始，空气动力对航天器运动的影响不能忽略。而 f 点对于采用降落伞着陆系统的垂直着陆的航天器，它是指降落伞着陆系统开始工作的高度，一般 f 点离地面约 10～12km. 对于能够产生足够升力，机动下滑到跑道上水平着陆的航天器，其 f 点选择在地面开始导航的高度，例如美国航天飞机轨道飞行器选择在 25km 高度。

再入器在再入段除受地球引力外，还受到空气动力的作用，由于严重的气动加热和减速过载，以及落点精度控制这三个主要问题，使再入段成为返回轨道中环境最恶劣、情况最复杂的一段。再入段的轨道设计、制导和控制的研究是返回轨道设计、制导方法研究的重点。

再入段是航天器返回过程中最有特征的飞行段。利用地球大气层这一天然资源，使再入器在再入过程中减速下降，并消耗它具有的巨大能量。再入器再入时受到与其飞行速度方向相反的气动阻力作用而减速，但减速时再入器及其内部的航天员和有效载荷将受到减速过载作用。同时当再入器以很高的速度穿越大气层时，它对迎面流大气的猛烈压缩和与之摩擦，使它的能量一部分转换为周围空气的热能，这部分热能又以对流和激波辐射传热的方式部分的传给再入器，使它的表面温度急剧升高而导致结构损坏。如

何减小气动加热，是气动热设计和防热设计要研究的课题；而如何使再入段的最大过载保持在航天员及有效载荷在允许的限度之内，则是返回轨道设计和制导方法研究要解决的重要问题。

减小最大过载、最大热流及总吸热量的途径，从第三章的讨论中知有两个途径：减小再入角 $|\Theta_e|$ 和增加升阻比 L/D。减少再入角 $|\Theta_e|$ 和增大升阻比 L/D，可以使最大过载和最大热流减小，但由于总的飞行时间增加，会使总吸热量增加。选择适当的再入角 Θ_e 和升阻比，是再入器总体设计、气动外形设计要解决的关键问题之一。

在再入段再入器受到严重的气动加热，因此应当设法尽可能的减小再入器周围炽热气体传递给它的热量。传热的机制与再入器的形状和周围气动流动特性有关。再入器驻点区热流与驻点的直径 d 的平方根成反比。即

$$q \propto \frac{1}{\sqrt{d}} \tag{6.1.1}$$

如果驻点的直径加大，则热流将减小。因此，对热流峰值很大的再入器一般都做成大钝头形和轴对称的旋成体。它的迎气流面是一个直径相当大的球面的一部分。

再入段对弹道式再入航天器比较简单，是零攻角再入，即升阻比为零的再入。在标准情况下，仅受阻力作用。在非标准情况，由再入器的静稳定性和动稳定性保证其稳定飞行。因为无制导，落点位置是不能进行控制的，其落点有较大的散布。

对弹道－升力式再入航天器，由于具有一定的升阻比，其最大过载和最大热流可以减小，同时在再入段，可以通过滚动控制改变升力的方向，从而能在一定程度上调整再入轨道，使弹道－升力式再入航天器具有一定的机动能力，这样就可以大大减小再入器的落点散布，可以将再入器的着陆点控制在一定的区域之内。

对升力式再入航天器，由于具有足够的能力，实现可重复使用

的水平着陆，解决垂直着陆的两大缺点：着陆时冲击过载对有效载荷的损伤和令人困扰的不易控制的落点散布。

升力式再入航天器机动能力很强，且可以无损的定点水平着陆，可以说解决了着陆点的精度问题。

5. 着陆段

再入式航天器的着陆方式有垂直着陆和水平着陆两种。垂直着陆用降落伞系统，从降落伞系统开始工作之点到再入器的软着陆点这段轨道称着陆段。即从开伞点 f 到着陆点 c 的飞行段 fc 段。水平着陆的再入器具有足够的升力，能够下滑到跑道上着陆。在水平着陆情况下，从再入器到达着陆导引范围，并开始操纵活动的翼面控制升力和阻力分布机动飞行时起，到再入器达到着陆点这段轨道称为着陆段，也称为导引着陆段。还有另外的分段方法将在后面讨论。

弹道式和弹道一升力式再入航天器多采用垂直着陆的方式。一般当再入到 15km 左右的高度，其速度可减小到声速，再继续下降，再入器的速度将逐渐趋于稳定的下降速度，保持到 100～200m/s 左右。此时如不进一步采取措施减速，则再入器将以每秒一百多米的速度冲向地面而坠毁。所以在着陆之前还需要一套着陆减速装置，将再入器进一步减小到安全着陆速度。通常采用降落伞系统来实现着陆减速。

返回过程中上述着陆前的最后减速是从弹射伞舱盖开始，直到再入器安全着陆为止。

抛伞舱盖的速度是指再入器的飞行速度接近于平衡速度，而平衡速度指再入器受到的气动阻力等于它所受重力时的速度。着陆段也就是再入器的降落伞系统工作段。降落伞着陆系统是根据这一阶段起始点的条件（主要是速度、高度和大气参数）和着陆条件（主要是着陆速度、当地风速和着陆区的地理情况）而设计的。图 6-6 是一个典型的降落伞着陆过程。

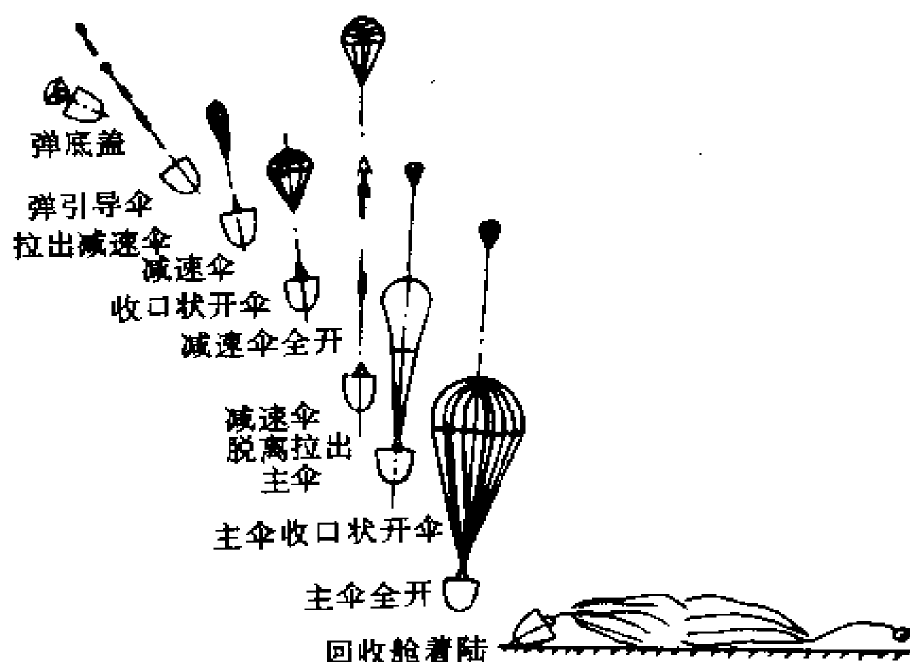


图 6-6 降落伞着陆过程

降落伞系统工作过程如下：当再入器下降到速度 200m/s 左右时(距地面高度 20km 以下)，降落伞系统开始工作。此时下降速度较大，为了降低伞的质量和强度标准，通常采用分步工作程序。

首先拉出引导伞，以帮助减速伞和主伞工作。然后拉出减速伞，减速伞的功能有两个：第一使再入器的速度由 200m/s 降低到 60m/s 左右，为主伞创造必要的开伞条件；第二还对以亚声速运动的再入器的姿态起稳定作用。这时的减速伞又称为稳定伞。最后，减速伞分离并拉出主伞。主伞的任务是完成最终的减速任务。保证再入器达到每秒数米的预定速度。

降落伞所需伞衣面积，近似地与再入器最后速度平方成反比。即最后速度要求越小，则伞衣面积越大。

降落伞是一种很有效的气动力减速装置，能够使再入器的下降速度小到 6～10m/s. 但如果再入器以这样的速度着陆，仍会产生相当大的着陆冲击过载，对航天员或有效载荷造成不利的影响。

在工程设计中，如果利用降落伞系统来实现更低的着陆速度，则需要把降落伞的质量设计标准提高到非常高的等级，从而大大增加技术难度和制造成本。因此，通常采用着陆缓冲装置来满足对再入器着陆速度的要求，减小着陆冲击过载。

减小着陆冲击过载，可采用缓冲火箭。当再入器下降到距地面数米的高度时，着陆缓冲火箭工作，对再入器加一负的冲量，使再入器着陆速度减小到 2m/s 左右，大大减小着陆冲击过载。

着陆缓冲火箭的主要特点是效能较高，能够在较小的过载条件下，将再入器着陆速度减小到很低水平。这对载人航天器的返回着陆十分重要。

升力式再入航天器水平着陆的导引着陆段，一般是在再入器下降到一定的高度（例如美国航天飞机轨道飞行器是 25km），气动力作用大到控制活动翼面可以控制再入器的机动飞行和下滑状况时开始的。在这一阶段飞行中，再入器受导航系统引导一面下滑一面机动飞行，最后达到准定常直线轨道继续下滑，到一定高度后放下起落架准备着陆，下滑继续到拉平高度为止。之后再入器平飞减速，到跑道上空，飘落下降到跑道上，滑跑减速停止。图 6-7 是水平着陆的再入器到达准定常直线轨道后的着陆段的示意图。

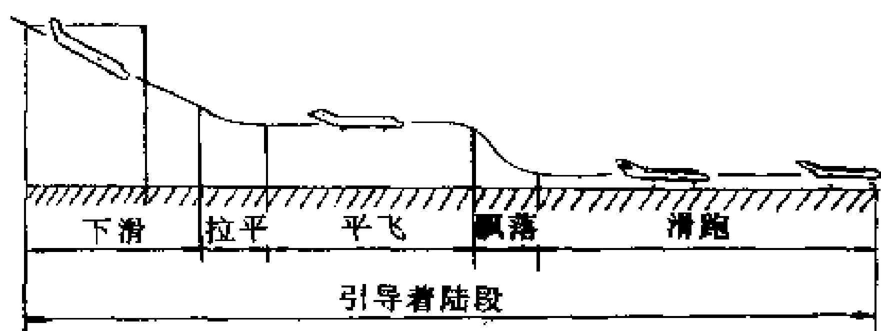


图 6-7　沿准定常直线轨道下滑的导引着陆段

§6.1.3 航天器按返回轨道形状分类

航天器按再入时有无升力作用可分为弹道式再入航天器、弹道一升力式再入航天器和升力式再入航天器。对每一种再入方式，其轨道可分为制动前的调姿段、制动段、过渡段、再入段和着陆段。

航天器脱离运行轨道返回地球并着陆到地球表面的过程中，其质心运动的轨迹叫做航天器的返回轨道。返回轨道设计和制导方法研究是航天器总体设计、控制系统设计的一部分。它与防热系统设计、结构设计、控制系统设计、动力系统设计和空气动外形设计都有着密切的关系。

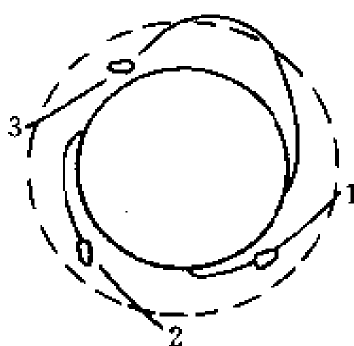


图6-8 三种再入轨道

1—弹道式轨道；2—升力式轨道；3—跳跃式轨道。

航天器的返回轨道按其形状分类时可分为弹道式轨道、升力式轨道、跳跃式轨道和椭圆衰减式轨道，前三种轨道的示意图如图6-8，第四种轨道如图6-10所示。

1. 弹道式轨道

弹道式再入航天器返回时的轨道称弹道式轨道。再入器再入大气层后，保持升力为零的状态飞行，或虽有升力，但不控制升力的方向，再入器将沿着单调下降的飞行路线返回地面。这种再入技术比较简单，较易实现，但在再入过程中由空气动力引起的过载较大，落点精度也较差。美国和苏联的第一代载人飞船(美国的“水星”号，苏联的“东方”号)都采用弹道式轨道。

2. 升力式轨道

弹道—升力式再入航天器和升力式再入航天器返回时的轨道统称升力式轨道。再入器再入大气层后，利用其在大气层中运动时产生的升力，使其按一条较平缓的轨道下降。与弹道式轨道相比，升力式轨道的减速时间长，因而承受的过载大大减小。又通过控制升力方向和大小，航向和侧向都可以做适当的轨道机动，以提高落点精度。与弹道式轨道相比，升力式轨道的再入走廊也比较宽(详细讨论见§6.1.4)。美国的“双子星座”号飞船、苏联的“联盟”号飞船和美国的航天飞机都采用升力式轨道。

3. 跳跃式轨道

航天器以较小的再入角再入大气层后，依靠升力，再次冲出大气层，做一段弹道式飞行，然后再再入大气层；也可以多次出入大气层，每再入一次大气层就利用大气进行一次减速。这种返回轨道的高度有较大起伏变化，故称跳跃式轨道。对于进入大气层后虽不再跳出大气，但靠升力使再入轨道有较大起伏变化的轨道，也称跳跃式轨道。以接近第二宇宙速度再入大气层的航天器多采用跳跃式再入轨道，以减小再入过载和较大范围调整落点。苏联的“探测器”6号自动站在实现绕月飞行后以跳跃式再入轨道返回地面，其示意图如图6-9所示。美国的“阿波罗”月球飞船在完成月球任务后也以跳跃式再入轨道返回地球。

4. 椭圆衰减式轨道

该轨道也称作“制动椭圆”式轨道。以接近第二宇宙速度返回到地球附近的航天器，假定没有地球大气层，则沿一条开普勒轨道运动，该开普勒轨道的近地点称作虚近地点，如果虚近地点离地面太高，则航天器只受到稀薄大气层的微弱阻力，那就不足以使航天器向地球降落。由于减速不多，航天器又会穿出大气层，形成很大椭圆绕地球运行的轨道。过了一圈后，又进入大气层，并再减速一

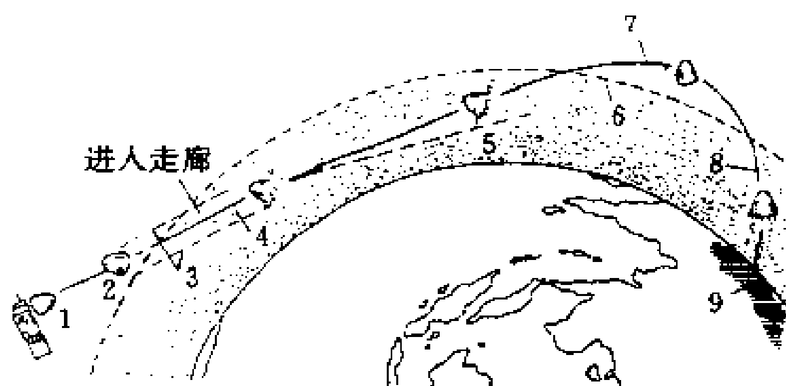


图 6-9 跳跃式进入示意图

1—进入器与航天器的其他部分分离； 2—进入器调整到进入姿态；
3—进入走廊的边界； 4—第一次进入； 5—假定的第一次进入的进入轨道；
6—假定的大气层上边界； 7—第一次进入后又跳出大气层； 8—第二次进入；
9—着陆区。

点，重新进入尺寸稍小、位置略变的椭圆轨道。由于穿出和飞入大气层的方向之间有偏差，因此长轴转过了某一角度，如图 6-10 所示。图 6-10 将转过的角度夸大了。原则上讲可以用许多这种“制动椭圆”来降低很大的初始再入速度。“制动椭圆”式再入的缺点是无法预先选定着陆点，需要很多的制动时间，对载人航天器，周期性地穿过地球辐射带会损害航天员的健康。因此，载人飞船从月球或行星返回时，一般不用这种方法，只有在遇到应急情况时，才将此方法作为应急方法使用[21]。

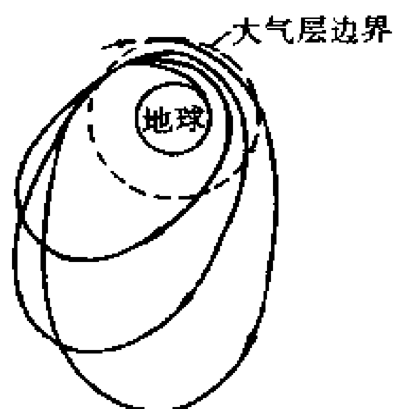


图 6-10 “制动椭圆”式轨道

§6.1.4 航天器再入走廊

航天器的安全返回是再入式航天器，特别是载人航天器首先要解决的问题。而安全返回指的是在假定着陆系统正常工作的条件下，再入器能够在再入走廊内再入大气层，通过大气层时的最大减速过载及其持续时间在规定的范围之内，产生的热量不会损坏再入器，以及再入器能在指定的区域或地点着陆。即为了保证过载、热流、总吸热量和着陆点精度满足要求，在再入段，保证航天器进入再入走廊内飞行是必须的。

再入走廊的概念在不同的时间，对不同类型的航天器、不同的再入方式有不同的含义，本文分别加以讨论。

1. 弹道式再入航天器的再入走廊

(1)用再入角的范围定义再入走廊

弹道式再入航天器再入时所承受的最大过载、最大热流和总吸热量主要受再入角 Θ_e 的影响。

在 $|\Theta_e|$ 过大，则轨道过陡，所受到的空气动力作用过大，减速过于激烈，以至使航天器受到的减速过载和气动加热超过航天员和航天器结构、仪器设备所容许承受的过载，或使航天器严重烧蚀，不能正常再入，因此存在一个最大再入角 $|\Theta_e|_{max}$，它的大小可以利用第三章的近似解，由允许的最大过载和最大热流加以确定。若 $|\Theta_e|$ 过小，由于飞行时间过长，使总吸热量超过允许值，这个限制也可以用第三章的近似解得出；也可能使再入器进入大气层后受到的空气动力过小，不足以使它继续深入大气层，而是在稠密大气层的边缘掠过而再入不了大气层，也不能正常再入。这两个因素使航天器为了正常再入存在着一个最小的再入角 $|\Theta_e|_{min}$。

为了正常再入，再入角 $|\Theta_e|$ 应满足下式：

$$|\Theta_e|_{min} \leqslant |\Theta| \leqslant |\Theta_e|_{max}$$

称这个范围为再入走廊。$\Delta\Theta_e = |\Theta_e|_{max} - |\Theta_e|_{min}$ 为再入走廊的宽度，如图 6-11 所示。再入走廊的宽度，在返回轨道设计时，可以通过数学仿真加以确定。

(2)用虚近地点的高度差定义再入走廊

在文献[2]、[21]采用所谓虚近地点的高度差定义再入走廊。

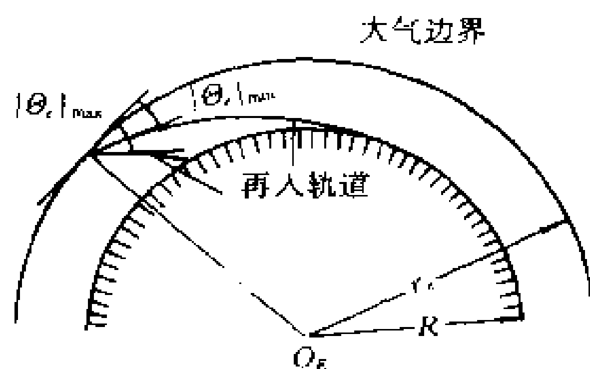


图 6-11 用再入角 Θ_e 定义的再入走廊

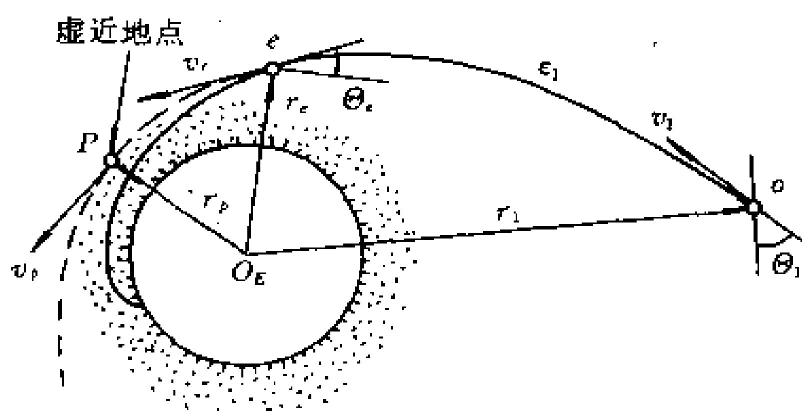


图 6-12 再入器的再入段轨道

如图 6-12 所示，设再入点为 e，当再入高度已定的情况下，由

过渡段开普勒轨道可以算出再入点 c 的速度大小 v_e 和再入角 Θ_e。如果假设地球周围无大气，可以由过渡段的开普勒轨道算出一个近地点 P，称此近地点为过渡段的开普勒轨道的虚近地点。在虚近地点 P 再入器有最小矢径 r_P 和最大速度 v_p。再入器返回轨道的过渡段轨道是与地球大气层边界相交的一簇开普勒轨道。簇中的每一条轨道都有其相应的虚近地点和速度 v_p，如果再入器轨道的虚近地点的高度超过某一限度，使再入器进入大气层后受到的气动力过小，不足以使它继续深入大气层，这样就会出现再入了又复出大气层的情况，也就是不能实现正常再入。当再入器轨道虚近地点的高度低于某一限度时，再入器再入大气层的轨道过陡，受到的气动力过大，减速过于激烈，以至使再入器受到的减速过载或气动加热超过规定的范围，这也不能实现正常再入。

有高限虚近地点的开普勒轨道称为上限轨道，相应地有低限虚近地点的轨道称下限轨道。

在图 6-13 中，上限过渡开普勒轨道的虚近地点用 P_o 表示，矢径用 r_{po} 表示，下限轨道的虚近地点用 P_u 表示，矢径用 r_{pu} 表示。上下限过渡轨道之间的通道称为再入走廊。再入器再入时一定要使它的过渡轨道在再入走廊之内。

上限轨道虚近地点的矢径大小 r_{po} 和下限轨道虚近地点的矢径大小 r_{pu} 之差 $\Delta h = r_{po} - r_{pu}$ 称为再入走廊的宽度。不同的再入器有不同的气动力特性、不同的防热结构和不同的最大允许过载值，因而有不同的再入走廊宽度。一般说来，弹道式再入航天器的再入走廊比较狭窄。

再入走廊对以第二宇宙速度再入大气层的航天器，如果最大允许过载不超过 10 g，其最大走廊宽度只有 10km。

弹道式再入走廊十分狭窄是可以改进的，弹道一升力式再入可以增加再入走廊的宽度。

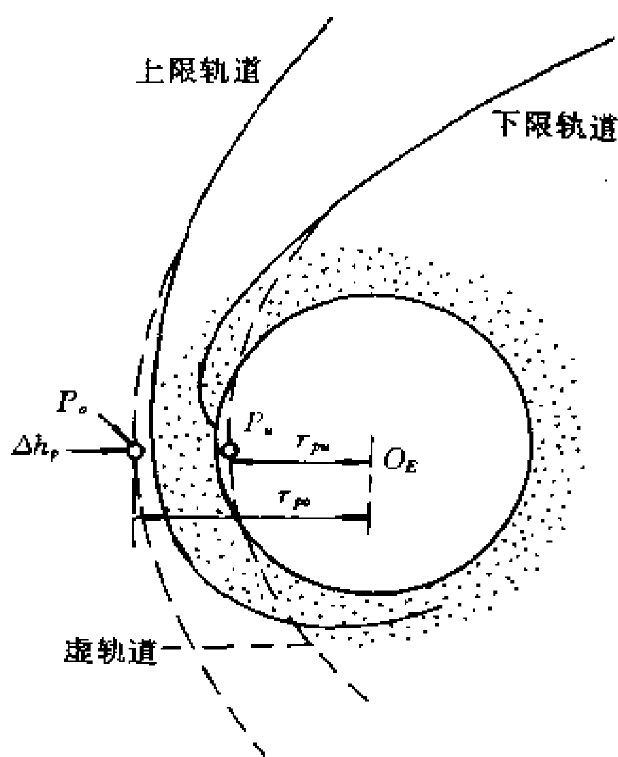


图 6-13　用虚近地点定义的再入走廊

2. 弹道一升力式再入航天器再入走廊

再入器在再入时具有一定的升力，可以加宽再入走廊，改善再入情况。当再入器有一定的负升力再入大气层时，负升力使再入器的轨道向内弯曲，从而可以使航天器因气动力过小可能会飞出大气层的轨道实现正常再入。与此类似，当再入器有一定的正升力再入大气层时，正升力使再入器轨道变得平缓，可以降低最大过载和最大热流，从而可以使航天器因受气动过载和气动加热限制不能正常再入变为正常再入。

弹道一升力式再入航天器由于具有一定的正升力，其再入宽

度明显加宽。

同样可以用再入角 Θ_e 的范围或者虚近地点的高度差来确定再入走廊的宽度。对再入角 $|\Theta_e|$ 的范围确定可以利用第三章的 $|\Theta_e|$ 与最大过载 n_{ymax}、最大热流 q_{max} 及总吸热的关系加以近似确定。对虚近地点高度差的确定可以先根据要求算出 Θ_e 的要求，再折算成虚近地点的范围。

弹道—升力式再入航天器再入走廊的确定，可以在返回轨道设计时，通过数学仿真加以确定。

3. 升力式再入航天器再入走廊

随着航天技术的发展，再入走廊限制条件愈来愈多，仅用再入角差和虚近地点高度差来定义再入走廊已不能满足要求，而要将再入走廊定义为一个“管道”，在此管道内飞行，对再入器的所有限制条件将得到满足。下面采用文献[26]的观点，对再入走廊下定义。

航天器纵向和侧向再入走廊定义如下：

定义1：再入走廊的上边界是指航天器在各种约束下，最平缓的飞行轨迹。它对应着最长的航程和最大的总加热量。

定义2：再入走廊的下边界是指航天器在各种约束条件下，它对应着最短的航程及最大的气动加热峰值。

上述两定义中的各种约束条件包括：气动加热热流约束、过载和动压约束、最大升阻比、最大（或最小）翼载荷、再入点初始与终端参数和航天器再入时运动方程等约束。

定义3：由再入走廊的上下边界之间所包含的空间构成纵向再入走廊。

定义4：侧向走廊是指保证航天器在水平面内飞行轨迹收敛到着陆点的包络线。

定义5：航天器的再入走廊是指由纵向再入走廊和侧向再入

走廊交叉部分的空间。

如果航天器在再入走廊内飞行，则航天器能在允许的气动力、气动热环境下飞行，再通过合适的制导，便能按规定的要求返回地面。

再入走廊图形的描述方法有许多种，作为图形的横坐标一般取相对于返回坐标系的速度，而纵坐标可以取高度，也可以取阻力加速度。图 6-14 是阻力加速度—速度组成的再入走廊示意图，图 6-15 是高度－速度组成的再入走廊示意图。

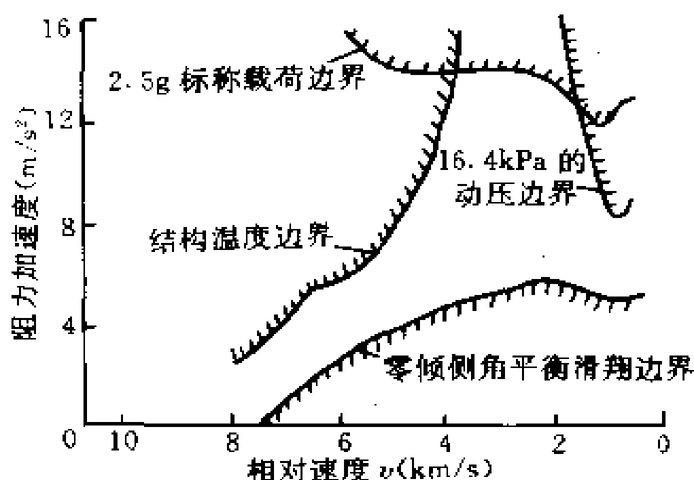


图 6-14　阻力加速度—速度组成的再入走廊

目前升力式再入航天器，例如美国航天飞机轨道飞行器用的是阻力加速度—速度组成的再入走廊。它的优点是可以直接对轴向过载进行限制，同时当给定了阻力加速度—速度的关系后，可以较方便地用解析式把航程求出来。

如何根据给定的各种约束条件，将再入走廊画出来，使用再入走廊对标准轨道设计、制导规律实现有何优点，将放在后面§6.9讨论。

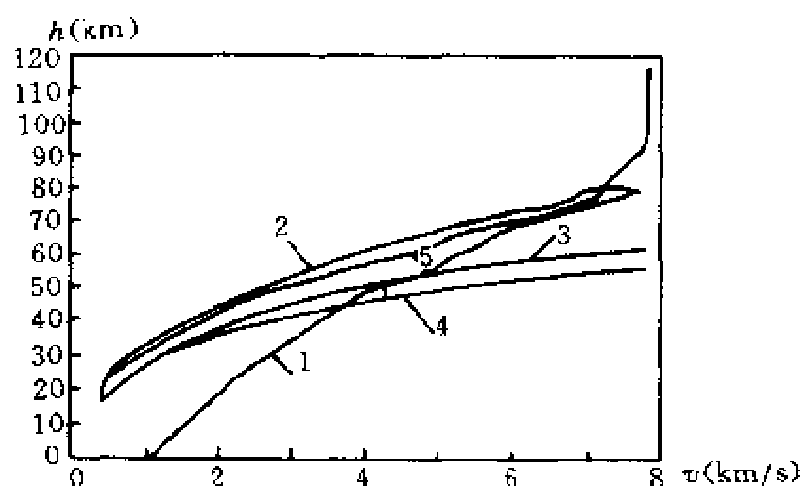


图 6-15 高度一速度组成的再入走廊

图中 曲线 1：热流边界、曲线 2：平衡滑翔边界

曲线 3：法向过载边界、曲线 4：动压边界

曲线 5：标准轨道曲线。

§6.2 航天器返回制动方向的确定

航天器要返回地球，必须采用火箭发动机的推力减小其飞行速度，或者改变其速度方向，或者同时改变其速度的大小和方向。从制动发动机开始工作到制动发动机停止工作的飞行段称为制动段。制动段要解决如下问题：

①制动点位置选择，为了保证再入器以要求的精度着陆到预定着陆点，在返回轨道设计时必须通过迭代方法选择合适的制动点位置。

②制动参数的选择，包括制动发动机推力大小、方向和工作时间的选择。

③制动段关机方程的建立。在实际有干扰的情况下，如何确定发动机关机时刻。

上面的问题主要是从质心运动方面考虑需要解决的问题，如果把航天器看成刚体，则还有姿态控制问题，如如何把航天器推力方向确保在要求的方向，当有外干扰时如何消除扰动影响，使推力基本上维持在要求的方向上。

上述三个问题的讨论将在后面返回轨道设计、制导方法研究中进行。本小节讨论如何确定推力方向。

制动段确定推力方向是一个十分重要的问题，但因要求不同，确定方法也不同，下面分别讨论。

§6.2.1 圆轨道运行且速度冲量最小时推力方向的确定

为研究方便取简化模型，假设：

①地球为一不旋转的圆球，再入段以前略去气动力。

②制动为冲量式的，瞬时提供速度增量 Δv。

其推力方向，即速度冲量方向如图 6-16 所示。设推力方向与当地水平的方向为 χ，图示 $\chi > 0$，该 χ 角与图 6-4 所定义的 φ_z 有如下关系

$$\chi = 180° + \varphi_z \tag{6-2-1}$$

因为假设原运行轨道为圆轨道，v_0 的方向即为当地水平方向。

如图 6-16 所示设 v_0、Θ_0、r_0 分别为制动点原运行轨道的速度大小、方向和地心距，v_1、Θ_1、r_1 分别为制动后的速度大小、方向和地心距，v_e、Θ_e、r_e 为再入点的速度大小、方向和地心距，根据冲量假设，制动瞬时完成 $r_1 = r_0$。

从制动后到再入前为过渡段，根据假设空气动力可略去，则制动后的轨道为椭圆轨道。

由轨道力学知

$$v_e^2 - \frac{2\mu}{r_e} = v_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} \tag{6-2-2}$$

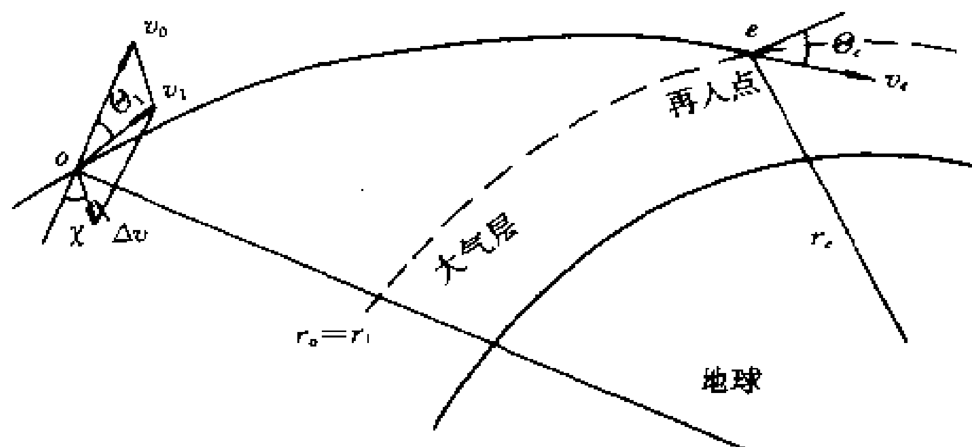


图 6-16　圆轨道时制动点再入点关系图

$$r_1 v_1 \cos\Theta_1 = r_e v_e \cos\Theta_e \tag{6-2-3}$$

由图 6 16 知

$$v_1 \cos\Theta_1 = v_0 - \Delta v \cos\chi \tag{6-2-4}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0 \Delta v \cos\chi \tag{6-2-5}$$

由式(6-2-2)知

$$v_1^2 = v_e^2 - 2\mu\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right) = v_e^2 - F \tag{6-2-6}$$

其中

$$F = 2\mu\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right) = 2v_0^2\left(\frac{r_1}{r_e} - 1\right) \tag{6-2-7}$$

式中 v_0 为圆轨道速度。

代式(6-2-4)入式(6-2-3)得

$$v_e = \frac{r_1(v_o - \Delta v \cos\chi)}{r_e \cos\Theta_e} \tag{6-2-8}$$

将式(6-2-8)和式(6-2-5)代入式(6-2-6)得

$$v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0 \Delta v \cos\chi = \left[\frac{r_1(v_0 - \Delta v \cos\chi)}{r_e \cos\Theta_e}\right]^2 - F$$

(6-2-9)

令

$$\left(\frac{r_1}{r_e\cos\Theta_e}\right)^2 = \alpha_1 \tag{6-2-10}$$

则式(6-2-9)可写成

$$\alpha_1(v_0 - \Delta v\cos\chi)^2 - F = v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0\Delta v\cos\chi \tag{6-2-11}$$

由第三章讨论知：Θ_e 的大小对再入段的过载、热负荷起着十分重要的作用，应由总体设计部门根据各种因素给出，可认为是已知的。而再入点的地心距 r_e 及制动点的地心距 $r_1 = r_0$ 也认为已知，即 α_1 是已知常数，而对 v_e 的大小通常不作要求。可以看出：当给定一个 χ 角，一定可以找出一个 Δv，使 Θ_e 满足要求，因此可提出一个问题，找一个最佳制动角 χ_{opt}（或 $\varphi_{zopt} = \chi_{opt} - 180°$）使 Δv 为最小，即燃料消耗最小，制动发动机工作时间最短。

为此将式(6-2-11)对 χ 角求偏导数可以得

$$\frac{\partial\Delta v}{\partial\chi} = \frac{2\Delta v\sin\chi[\alpha_1\cos\chi\Delta v - v_0(\alpha_1 - 1)]}{2\alpha_1\Delta v\cos^2\chi + 2v_0\cos\chi - 2\alpha_1 v_0\cos\chi - 2\Delta v} \tag{6-2-12}$$

故出现驻点的条件

$$\left.\begin{aligned} &①\sin\chi = 0 \\ &②\alpha_1\cos\chi\Delta v - v_0(\alpha_1 - 1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-2-13}$$

先分析上式的第二个解

$$\cos\chi = \frac{v_0(\alpha_1 - 1)}{\Delta v\alpha_1} \tag{6-2-14}$$

代式(6-2-14)入式(6-2-11)得

$$\Delta v^2 = \frac{v_0^2(\alpha_1 - 1) - \alpha_1 F}{\alpha_1} \tag{6-2-15}$$

代式(6-2-15)入式(6-2-14)得

$$\cos\chi = \frac{v_0(\alpha_1 - 1)}{\sqrt{v_0^2(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - \alpha_1^2 F}} \tag{6-2-16}$$

或

$$\mathrm{tg}\chi = \frac{\sqrt{v_0^2(\alpha_1 - 1) - \alpha_1^2 F}}{v_0(\alpha_1 - 1)} \tag{6-2-17}$$

但式(6-2-16)要有意义,需满足

$$v_0^2(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - \alpha_1^2 F > 0 \tag{6-2-18}$$

且

$$\cos\chi = \frac{v_0(\alpha_1 - 1)}{\sqrt{v_0^2(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - \alpha_1^2 F}} \leqslant 1 \tag{6-2-19}$$

展开式(6-2-19)得

$$v_0^2(\alpha_1 - 1) - \alpha_1^2 F \geqslant 0 \tag{6-2-20}$$

因 $\alpha_1 > 1$,比较式(6-2-20)和式(6-2-18)知,式(6-2-20)的条件更严格一些。

分析式(6-2-20)可以看出 r_1, r_e, Θ_e 应满足什么条件

令

$$\beta_1 = F/v_0^2 \tag{6-2-21}$$

则式(6-2-20)改写成

$$\beta_1\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 \leqslant 0 \tag{6-2-22}$$

由 $\beta_1\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 = 0$ 可得

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\beta_1}(1 \pm \sqrt{1 - 4\beta_1}) \tag{6-2-23}$$

故

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta_1}}{2\beta_1} \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta_1}}{2\beta_1} \tag{6-2-24}$$

即

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta_1}}{2\beta_1} \leqslant \left(\frac{r_1}{r_e\cos\Theta_e}\right)^2 \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta_1}}{2\beta_1}$$

$$\frac{r_1}{r_e}\frac{\sqrt{2\beta_1}}{\sqrt{1-\sqrt{1-4\beta_1}}} \geqslant \cos\Theta_e \geqslant \frac{r_1}{r_e}\frac{\sqrt{2\beta_1}}{\sqrt{1+\sqrt{1-4\beta_1}}} \tag{6-2-25}$$

当 r_1、r_e 和 Θ_e 满足式(6-2-25)条件时，则由

$$\cos\chi = \frac{v_0(\alpha_1-1)}{\sqrt{v_0^2(\alpha_1-1)\alpha_1-\alpha_1^2F}}$$

得

$$\chi_{opt} = \chi_2 = arccos\left[\frac{v_0(\alpha_1-1)}{\sqrt{v_0^2(\alpha_1-1)\alpha_1-\alpha_1^2F}}\right] \tag{6-2-26}$$

由式(6-2-25)看出 $\cos\Theta_e$ 要有意义，必须

$$1-4\beta_1 \geqslant 0 \tag{6-2-27}$$

将 β_1 及 F 值代入上式得

$$1-4\frac{F}{v_0^2} = 9-8\frac{r_0}{r_e} \geqslant 0$$

即

$$\frac{r_0}{r_e} \leqslant \frac{9}{8} \tag{6-2-28}$$

取 $R = 6371.11\text{km}$、$h_e = 100\text{km}$

则 $$r_0 \leqslant 7280\text{km}$$

即 $$h_0 \leqslant 908\text{km}$$

现在分析第一个解，当式(6-2-25)和式(6-2-28)条件不满足时，应取 $\sin\chi = 0$ 的解，即

$$\chi_1 = \chi_{opt} = 0 \tag{6-2-29}$$

$\chi_{opt} = \chi_1 = 0$ 表示此时制动发动机的最佳推力方向应在圆轨道运动的反方向，即不改变速度方向，仅改变速度的大小。这便是一些文献中提到的，反向制动是最佳方向制动，其制动速度冲量 Δv 最小。

上述说法更严格的讲，还应说明当满足式(6-2-25)和式(6-2-28)时，Δv 不仅是极值，而且是极小值。当不满足式(6-2-25)和式(6-2-28)时 $\chi = 0$，使 Δv 不仅为极值而且为极小值，此时 Δv_{min} 由式(6-2-11)知

$$\Delta v_{min} = v_0 - \sqrt{\frac{F}{a_1 - 1}} \tag{6-2-30}$$

要说明 Δv 为极小值，应求二阶偏导数并加以判断，数学上求导较繁可以从物理意义上解释应为极小值。

下面举例说明最佳方位角 χ 与制动点地心距 r_1 和再入角 Θ_e 的关系。计算取 $h_e = 100\text{km}$，h_1 由 200km 变化到 800km，Θ_e 由 $-8°$ 变化到 $-1°$，计算结果如图 6-17 所示。

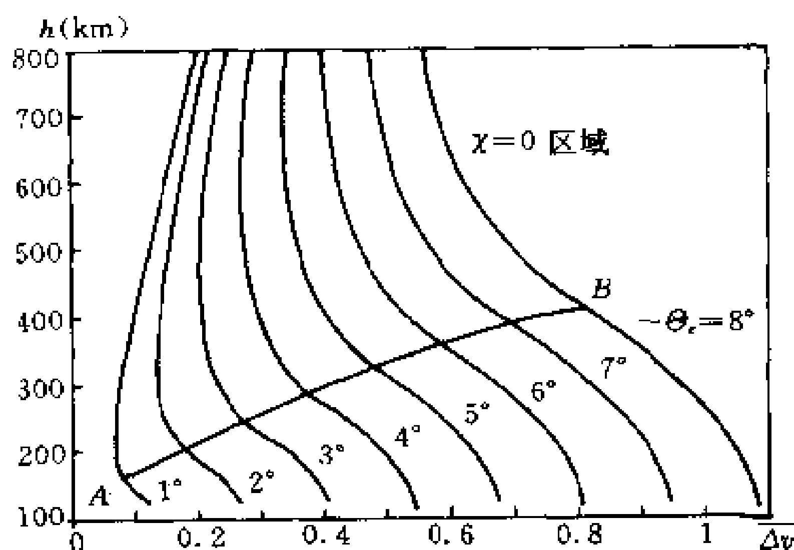


图6-17 h、Θ_e、Δv_{min} 的关系图

图中的横坐标为 Δv_{min}，纵坐标为高度 h. 每条曲线对应于 Θ_e 为常数，而 AB 线为 χ_{opt} 的转折线。在 AB 线之上，其最佳制动角 $\chi = 0$；在 AB 线之下，其最佳制动角 χ 由式(6-2-17)确定。AB 线由条件 $\beta_1 \alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 = 0$ 确定。

从图6-17看出，再入角 $|\Theta_e|$ 较小时，AB 线上的制动冲量并非

最小的，例如$\Theta_e = -1°$时A点的制动冲量$\Delta v_{min} = 85.5m/s$，此时$h = 156km$，而$(\Delta v_{min})_{min}$对应于$h = 212km$，此时$(\Delta v_{min})_{min} = 68.2m/s$。

因为一般制动高度$h_0 > 300km$，且$|\Theta_e| < 5°$，则$\chi_{opt} = 0°$，且制动高度愈高，Δv_{min}愈大。这就验证了人们常说对圆轨道而言，反向制动为最佳方向制动。

§6.2.2 椭圆轨道运行且速度冲量最小时推力方向确定

上一小节讨论了运行轨道为圆轨道，能量最省时，如何确定制动发动机推力方向，如果运行轨道为椭圆轨道，用圆轨道运行的结果会带来误差。下面介绍一迭代方法确定椭圆轨道运行时，制动发动机推力方向的确定方法。

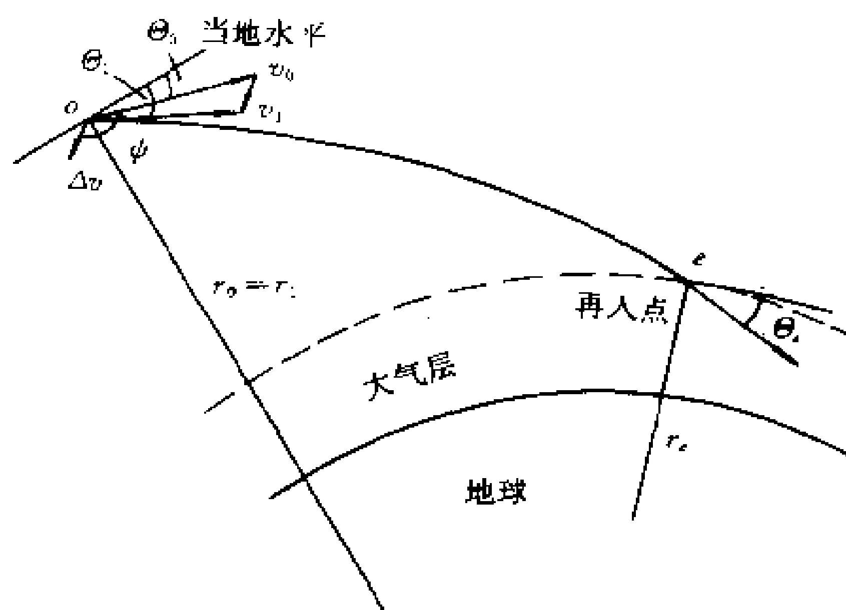


图6-18 椭圆轨道时制动点再入点关系图

如图6-18所示，假设原运行轨道为椭圆轨道。图6-18的符号同图6-17中的符号意义相同，但此时 $\Theta_0 \neq 0$，且规定 Θ_0 向下为负，图示的 $\Theta_0 < 0$. φ_2 为 Δv 与当地水平面的夹角。在运行轨道为椭圆轨道时，又规定 Δv 的方向(即推力方向)与 v_0 方向的夹角为 ψ，且规定图示的 ψ 为负值。显然

$$\chi = 180 + (\psi + \Theta_0)$$

$$\varphi_2 = \psi + \Theta_0$$

下面的讨论仍假设：①冲量假设，速度增量 Δv 瞬时得到；②制动后进入大气层之前，仍按椭圆轨道飞行。

由轨道力学知

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0\Delta v\cos(180^\circ - \psi) \\ &= v_0^2 + \Delta v^2 + 2v_0\Delta v\cos\psi \end{aligned} \qquad (6\text{-}2\text{-}31)$$

$$\Theta_1 = \Theta_0 + \Delta\Theta = \Theta_0 - \text{tg}\left(\frac{\Delta v\sin\psi}{v_0 + \Delta v\cos\psi}\right) \qquad (6\text{-}2\text{-}32)$$

而

$$v_e^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right) + v_1^2 \qquad (6\text{-}2\text{-}33)$$

$$\cos\Theta_e = \frac{r_1 v_1\cos\Theta_1}{r_e v_e} \qquad (6\text{-}2\text{-}34)$$

从上面几式可以看出：当给定一个速度增量 Δv 和制动方位角 ψ 时，可以得到 Θ_1、v_1，当 r_e 认为已知时，可由式(6-2-33)和式(6-2-34)得到 v_e、Θ_e. 反之当 v_e、Θ_e 确定时，可由式(6-2-31)和式(6-2-32)确定 Δv 及 ψ 的大小。

但如果 Θ_e 的大小，已由过载和热流峰值确定，且对 v_e 的大小不作要求时，可以求出最佳的 ψ 值，使 Δv 最小。因

$$\cos\Theta_e = \frac{r_1}{r_e}\frac{v_1\cos\Theta_1}{v_e} \qquad (6\text{-}2\text{-}35)$$

由图6-17知

$$\begin{aligned} v_1\cos\Theta_1 &= v_0\cos\Theta_0 - \Delta v\cos\chi \\ &= v_0\cos\Theta_0 - \Delta v\cos[180^\circ + (\psi + \Theta_0)] \\ &= v_0\cos\Theta_0 + \Delta v\cos(\psi + \Theta_0) \end{aligned} \tag{6-2-36}$$

由式(6-2-31)和式(6-2-33)可得

$$v_e = \left[2\mu\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0^2 + \Delta v^2 + 2v_0\Delta v\cos\psi\right]^{1/2} \tag{6-2-37}$$

将式(6-2-36)和式(6-2-37)代入式(6-2-35)可得

$$\cos\Theta_e = \frac{r_1}{r_e}\,\frac{v_0\cos\Theta_0 + \Delta v\cos(\psi + \Theta_0)}{\left[2\mu\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right) + v_0^2 + \Delta v^2 + 2v_0\Delta v\cos\psi\right]^{1/2}} \tag{6-2-38}$$

从式(6-2-38)可以得出

$$\cos\Theta_e = f\left(\frac{\Delta v}{v_0}, \psi\right)$$

通过对式(6-2-38)求导，且令 $\dfrac{\partial \Delta v/v_0}{\partial \psi} = 0$ 可以得

$$\sin(\psi + \Theta_0)\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 + [\sin\Theta_0 + \cos\psi\sin(\psi + \Theta_0)]\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right) + \frac{2\mu}{v_0^2}\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right)\sin(\psi + \Theta_0) + \sin\Theta_0\cos\psi = 0 \tag{6-2-39}$$

解式(6-2-39)可以得使 $\Delta v/v_0$ 最小时，$\Delta v/v_0$ 和 ψ 应满足的条件

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{-[\sin\Theta_0 + \cos\psi\sin(\psi + \Theta_0)] \pm \sqrt{S_1}}{2\sin(\psi + \Theta_0)} \tag{6-2-40}$$

式中

$$S_1 = [\sin\Theta_0 + \cos\psi\sin(\psi + \Theta_0)]^2 - 4\sin(\psi + \Theta_0) \cdot \left[\frac{2\mu}{v_0^2}\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_1}\right)\sin(\psi + \Theta_0) + \sin\Theta_0\cos\psi\right]$$

当 $\Delta v/v_0$ 和 ψ 满足式(6-2-40)时，$\Delta v/v_0$ 是最小的。但得不到显式解，可用下法迭代求解。

先选 $\psi=-180°$ 作第一次估计，再利用式(6-2-40)求出 $\Delta v/v_0$，然后利用式(6-2-31)、式(6-2-32)、式(6-2-33)和式(6-2-34)求出 Θ_e

但此时的 Θ_e 不一定满足要求，可以利用偏导数 $\partial\Theta_e/\partial\psi$ 求出 ψ 的第二次近似值。

$$\psi_2=\psi_1+\Delta\psi$$

而

$$\Delta\psi=\frac{\Theta_{e2}-\Theta_{e1}}{\partial\Theta_e/\partial\psi} \tag{6-2-41}$$

式中 Θ_{e2}—— 再入角 Θ_e 的要求值

Θ_{e1}—— 再入角 Θ_e 的计算值

$\frac{\partial\Theta_e}{\partial\psi}$—— 再入角 Θ_e 对 ψ 的偏导数

$\partial\Theta_e/\partial\psi$ 可以通过式(6-2-35)对 ψ 求偏导数得到

$$\frac{\partial\Theta_e}{\partial\psi}=cse\Theta_e\left(\frac{r_1}{r_e}\right)\left\{\frac{\Delta v/v_0(\sin\psi\cos\Theta_0+\cos\psi\sin\Theta_0)}{v_e/v_0}-\frac{[(1+\Delta v/v_0\cos\psi)\cos\Theta_0-\Delta v/v_0\sin\psi\sin\Theta_0]\sin\psi\Delta v/v_0}{(v_e/v_0)^3}\right\} \tag{6-2-42}$$

§ 6.2.3　返回航程最小时推力方向的确定

前面讨论了能量最省时，推力方向的确定。但这并不是唯一的方法，实际上确定推力方向还有其它方法，最常用的是用返回航程最小来确定推力方向。

1. 弹道式再入且航程最小时推力方向的确定

仍采用瞬时冲量假设，先研究制动角和航程的关系，假设航天

器运行轨道一定，速度增量 Δv 也一定，取不同的制动角 φ_z 可得不同的射程，如图6-19所示。

从图6-19看出，当 φ_z 变化时，再入器的航程 S_b 也随之变化，当 $\varphi_z = -110°$ 时，航程 S_b 最小，且制动角 φ_z 产生偏差 $\Delta\varphi_z$ 时所引起的航程偏差量 ΔS_b 也最小，所以称 $\varphi_z = -110°$ 为在制动速度 Δv 下的最佳制动角或最小航程制动角。按不同的制动速度 Δv 计算若干条如图 6-19 的曲线，则一般可从中选取一条在最佳制动角下，使得返回航程、落点散布、再入过载均满足设计要求的轨道。这条轨道的制动速度 Δv 将作为制动发动机总冲选取的依据，这条曲线的最佳制动角将作为设计的制动角。

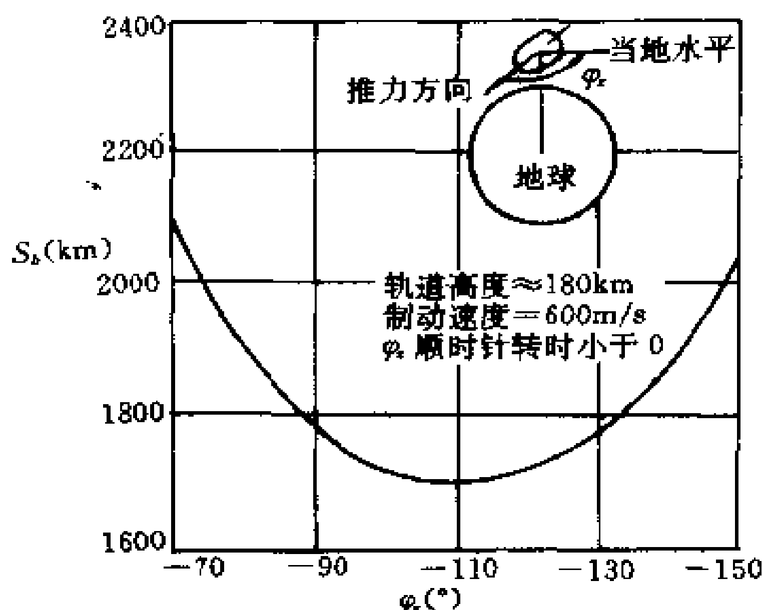


图6-19 典型再入器返回航程 S_b 随制动角 φ_z 的变化

2. 弹道—升力式再入且航程最小时推力方向的确定

推力方向的确定原则上讲与弹道式再入时推力方向确定相似，不过对飞船而言，由于飞船允许的再入过载远远小于卫星再入

时允许的再入过载，所以一般飞船的制动速度 Δv 约为120～300m/s，比卫星所需的制动速度要小。选用最小航程来确定制动方向，在弹道—升力式再入航天器的返回制动中得到广泛的应用。所谓最小航程轨道是指在运行轨道和制动速度一定的情况下，改变制动方向角 φ_k 而使航程最短的轨道。采用最小航程轨道不但可以充分发挥制动速度的作用，使航程最小，而且可使由于制动段误差而造成的着陆点偏差为最小。对于给定的圆轨道高度 h 和制动速度 Δv，最小航程轨道的制动方向角 φ_k 的值可由图 6-20 求出。

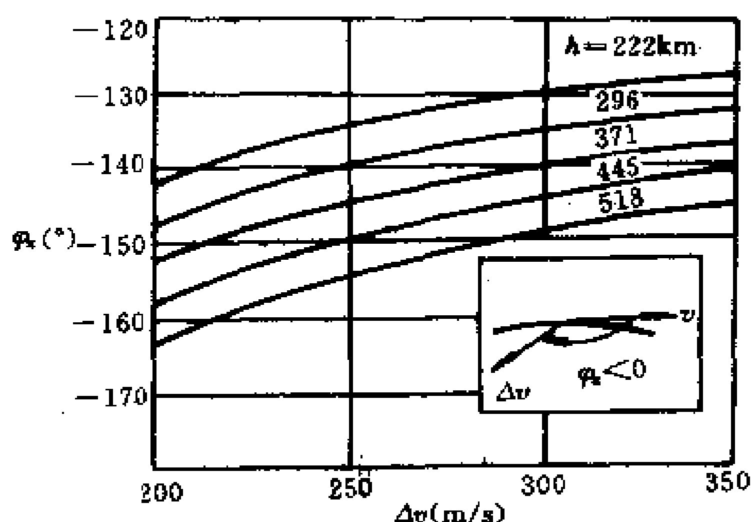


图6-20 最小航程轨道的制动方向角 φ_k 随圆轨道高度 h 和制动速度 Δv 的变化

飞船最小航程轨道的再入角 Θ_e 可根据圆轨道高度 h 和制动速度 Δv 的值，由图 6-21 求得。最小航程轨道的航程 S_b 对制动速度 Δv 的偏导数随圆轨道高度 h 和制动速度 Δv 的关系如图 6-22 所示。

从图6-22和图6-21可看出：对于一个固定的圆轨道高度来说，制动速度越小，则再入角越小，但 $\partial S_b/\partial\Delta v$ 就越大，因此，在设计飞船返回轨道，特别是弹道式飞船返回轨道，不可将制动速度取得过小，以免落点散布过大。

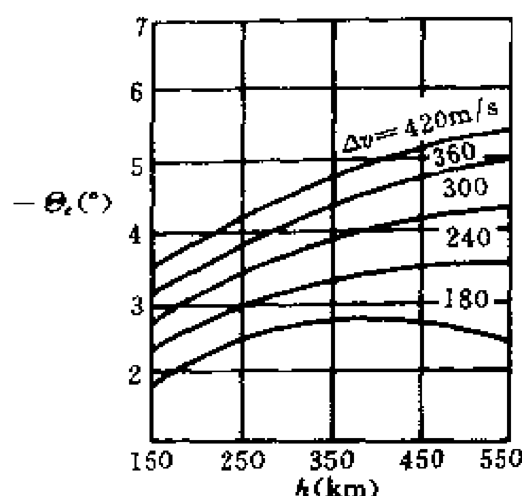


图6-21 最小航程轨道的再入角 Θ_e 随圆轨道高度 h 和制动速度 Δv 的变化

如果飞船总体设计部门给定圆轨道高度和再入角，则由图6-21可以确定速度增量，再由图6-20已知圆轨道高度、速度增量 Δv，便可以确定航程最小时制动角方向。

上述确定制动发动机推力方向的方法，均以瞬时冲量为基础，实际上，推力并非无限大、速度增量并非冲量，为了更精确确定制动发动机推力方向，可以用数值积分方法求最佳制动方向，同时可以分析冲量法带来的误差。

不用冲量法，推力的大小要给定，通常推力的大小是采用现行的制动发动机的推力，可以认为是已知的。需要确定的是制动发动机推力的方向和其工作时间。所谓优化可以是燃料最省，也可以是航程最短。燃料最省在推力大小一定即制动发动机工作时间最短，而航程最短，则需要通过计算求出其航程，选择航程最短时其制动方向为最佳制动方向。

其具体算法可以先假定制动方向，通过计算得到满足再入角要求的制动发动机工作时间或者再入航程，再通过迭代的方法找出制动发动机工作时间最短或航程最小的最佳制动方向。

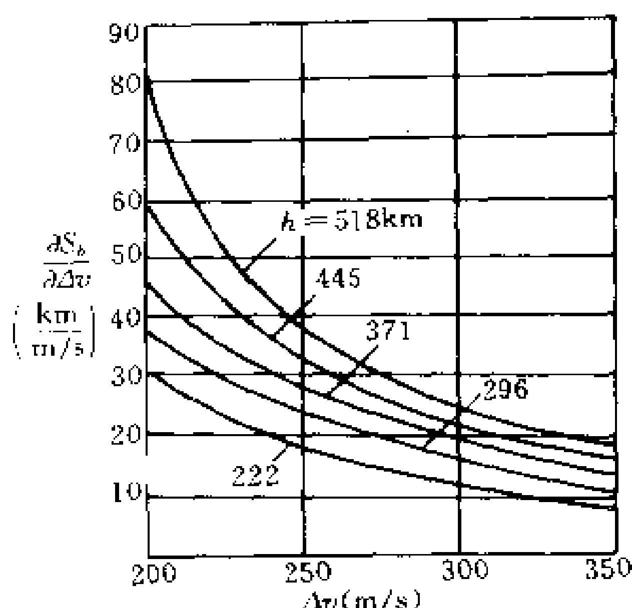


图6-22 导数 $\partial S_b/\partial \Delta v$ 随圆轨道高度 h 和制动速度 Δv 的变化

§6.3 人造地球卫星返回轨道设计

弹道式再入航天器又可分为有升力而不加控制的弹道式再入航天器与升力为零的弹道式再入航天器两种。前者主要用于返回式卫星，后者用于美国的第一代载人飞船。两种航天器返回轨道设计稍有不同，本节主要研究前者，即卫星返回轨道设计。

§6.3.1 轨道设计对卫星总体设计要求

为设计好卫星返回轨道，对卫星总体设计提出一系列要求，现分别叙述如下：

1. 再入器应具有的飞行动力学特性

返回式卫星由于不载人，其再入过载的峰值可允许达到20g，

其落点精度要求也不甚高，再入飞行时间短，又不要求重复使用，其防热设计相对而言也较简单。为了降低研制和生产费用，再入时其姿态和轨道均不加以控制，再入器(对卫星而言，更多场合称返回舱)以其自身的稳定性，维持其头部朝前的姿态运动或较快地转到头部朝前的姿态运动，为实现这种再入轨道，要求再入器在大气中飞行时应具有如下特性：

(1)再入器必须是静稳定的，且应具有足够的静稳定度。为此适当选取再入器外形和仪器、结构布置，以保证再入器的静稳定性。一般静稳定度在各马赫数下不小于5%，即可保证再入器较快地恢复到头部朝前的姿态，这不但有利于防热设计，而且也满足正常开伞对再入器的姿态要求。

(2)再入器必须是动稳定的。当再入器的形状如图6-23所示，小头朝前的球头—截锥—球尾体时，当满足静稳定条件时，再入器的运动也是动稳定的，这是因为此时的气动阻尼力矩是正的阻尼力矩，由文献[5]知，此时运动也是稳定的。相反大头朝前的球头—倒截锥—球尾体的再入器，当满足静稳定条件时，其气动阻尼力矩往往是负的阻尼力矩，在一定的条件下其运动是动不稳定的，而要使其运动稳定，必须要加姿态控制。这就是这类航天器的再入器一般选取小头朝前运动方式，而不取大头朝前运动方式的主要原因。

(3)再入器不具有倒向稳定性。即存在一个配平点，无第二配平点，当采用小头朝前的球头—截锥—球尾体时，往往可以通过选取球尾的形状达到避免出现倒向稳定性。

2. 对起旋和消旋的要求

制动段的制动参数选择除了制动速度Δv和制动方向选择外，还有起旋和消旋转速的选择。

(1)起旋转速的选择

由于再入器在制动发动机工作期间存在着推力偏斜等干扰，为了保证将制动发动机提供的速度增量在所设计的方向，再入器

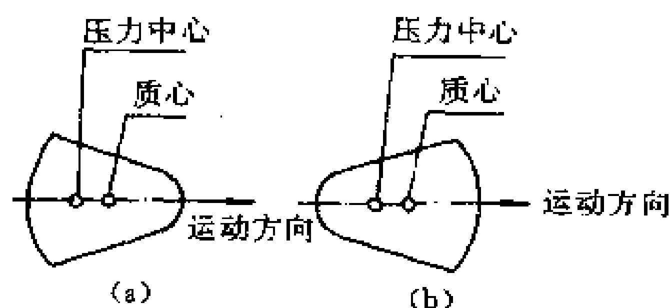


图6-23　再入器外形(旋成体)与飞行动稳定性关系示意图
(a)小头朝前时　　(b)大头朝前时

在制动火箭工作期间往往采用自旋稳定的方式，否则如不采取任何稳定措施，则由于制动时再入器姿态偏差过大，将使返回轨道偏差过大。

在再入器与航天器的非返回部分分离后，利用反作用喷气装置使再入器绕其纵轴旋转，这叫做起旋。再入器自旋角速度大小由最大轨道偏差量决定，最大轨道偏差量由可能存在的最大干扰量按偏差轨道算出。一个典型例子，当再入器的自旋角速度小于70r/min时，制动发动机工作期间，抗干扰能力很差，当自旋角速度大于90r/min 时抗干扰能力明显增加。

(2)消旋转速的选择

采用自旋稳定的再入器在再入之前，必须将再入器消旋，即将自旋角速度减至10r/min 左右。如再入器不消旋，而以高自旋角速度再入大气层，则攻角将衰减得很慢，而将自旋角速度下降到10r/min，则攻角很快衰减到零，以利于再入器的防热。消旋设计中，不宜使再入器消旋到自旋角速度接近于零的情况出现，因为再入器自旋角速度接近于零，它将使再入器的某一面长期对着迎面气流，引起气动热的不均匀，也不利于消除小不对称因素的影响。

3. 对运载火箭的要求

对于有机动变轨能力的再入式航天器，对运载火箭送卫星入

轨的精度要求可以低些。这是因为利用航天器的机动变轨能力可以将其轨道周期做适当的改变，使得返回圈的星下点轨迹正好与设计的返回圈的标准星下点轨迹重合，从而消除返回时初始的横向偏差。

对于无机动变轨能力的航天器，为了保证在预定的运行期后，正好经过设计的返回圈的星下点轨迹，则需要运载火箭具有较高的制导精度，同时要特别精确控制航天器入轨点的初始周期和近地点高度。对于近地轨道的航天器来说，一般这两个参数的偏差对返回轨道制动点的横向偏差影响大，至于因近地点高度偏差引起的返回轨道的纵向着陆点偏差，可以用调整制动点位置的办法来消除。

4. 对卫星返回着陆场区的要求

卫星着陆区的选择应根据各国的具体情况确定。例如美国具有庞大的海上力量，一般选取在海上回收。前苏联和中国根据本国情况选取在陆上回收的方式。

理论回收区应综合考虑以下条件：

①地势较平坦，无大型水库和大的江河湖泊，无大森林；

②交通方便，同时便于直升飞机起降；

③通信畅通；

④没有大型工矿企业的建筑设施和重要的军事设施，避开110kv 以上的高压线。

§6.3.2 卫星标准返回轨道设计

卫星标准返回轨道的参数，完全由制动段结束时的运动参数确定。卫星标准返回轨道设计实际上就是制动段制动参数选择，起旋和消旋参数选择。选择的标准返回轨道应满足如下要求：

①制动点应在原运行轨道上，星下点轨迹应通过着陆点；

②落点（或开伞点）的偏差要小；

③再入点倾角 Θ_e 应满足要求；

④再入过载，特别是峰值过载应满足要求。

当然还应满足测控系统、回收着陆系统的要求。

为满足上述要求可供调整的参数有制动点位置，即制动点的经度和纬度，但为了保证制动点的位置在原运行轨道上，实际上可控制的参数只有经度或者纬度。另一可调整参数为制动发动机推力的大小、方向和工作时间，如前所述，推力大小和方向已由其它因素确定，真正可调整的仅为制动发动机的工作时间。

标准返回轨道设计既可以采用三自由度的数学模型（初步设计用），也可以采用六自由度的数学模型，此时不考虑任何干扰因素，原始数据均采用标准值。具体步骤可先选用不同的制动发动机工作时间进行迭代，使再入角 Θ_e 满足要求，再通过制动点位置的调整，使其落点精度满足设计要求。

§6.3.3 返回轨道偏差量和落点偏差计算

卫星标准返回轨道是在标准条件下，无任何干扰条件下得到的。在实际飞行中，由于存在着各种干扰，实际飞行的轨道参数不同于标准轨道参数，其落点也不会完全落在标准着陆点，因此要讨论干扰因素的种类及其大小，计算有干扰时的轨道偏差和落点偏差。它既可以分析干扰因素对轨道偏差量和落点偏差的影响，也可以对干扰因素的大小提出量化的要求。

1. 干扰因素的分类

计算实际卫星返回轨道应考虑各种干扰因素，据参考文献[2]介绍，飞行中考虑了13种干扰因素。下面根据干扰因素的特点分别加以介绍，分析时以制动点为起始点。

(1)初始条件偏差

对三自由度弹道仿真，初始条件偏差包括制动点的位置误差和速度误差，位置误差包括高度和星下点的经度和纬度偏差，速度

误差包括速度的大小和方向误差。它主要由制动点以前的各种误差积累造成的，如运行轨道的入轨偏差、稀薄大气的密度偏差、卫星气动参数偏差和测控系统的误差等。

对六自由度弹道仿真，除制动点的位置和速度误差外，还包括卫星的姿态角和姿态角速度误差，它主要是姿态控制系统并不能保证卫星姿态角和姿态角速度在制动点达到标准值造成的。

(2)由制动发动机引起的偏差

一个是制动发动机性能和安装位置偏差，如制动发动机性能参数偏差，包括总冲偏差、推力偏斜、推力偏心等。另一个是制动发动机点火时刻的偏差。

(3)环境条件、结构参数和气动特性的偏差

环境条件如大气密度偏差；结构参数偏差如质量偏差、质心横移、卫星转动惯量及惯性积偏差；气动系数偏差主要指卫星再入大气层后，升力系数、阻力系数等的偏差。

(4)风的影响

(5)其它干扰因素的影响

还有些干扰因素不属于上述四类，如级间分离干扰是指舱段间和暗道间分离干扰，它包括分离发动机干扰，从暗道中排出剩余气体干扰；返回段控制发动机性能参数及安装误差，如起旋、消旋发动机的总冲偏差、推力偏斜、推力横移；还有些干扰根据具体工程设计状态确定。

2. 用最大偏差法计算运动参数最大偏差及着陆点最大偏差

由于有干扰作用，实际轨道的运动参数不同于标准轨道的运动参数，而如何计算运动参数的最大偏差量是轨道计算和设计要解决的问题。如落点的最大偏差对总体设计、着陆场区的选择、回收部队的布置十分重要，而随高度变化的过载偏差、动压偏差，对控制系统、回收系统也是十分重要的，而高度偏差 Δh 、速度偏差 Δv 、马赫数偏差 ΔM、总攻角偏差 $\Delta\eta$、总过载偏差 Δn 随时间的变

化对总体设计、结构设计、测控系统都有意义。

下面用最大偏差法求参数的最大偏差量。具体做法是：根据所分析的各独立干扰因素的偏差量（3σ 值，而 σ 是均方差），按各干扰因素对应的物理量的期望值 $\pm 3\sigma$，分别计算出某一干扰因素下的轨道，称为干扰轨道，并根据各系统的设计需要，按飞行高度或飞行时间分别对各干扰轨道参数（速度、过载、坐标等）取其偏差量（干扰轨道上的值与标准值之差）的均方和，作为各轨道参数在给定高度和时间上的最大偏差量。

在求均方和时有两种作法，一种是取期望值 $+3\sigma$ 和期望值 -3σ 对应的偏差量中绝对值较大的为该干扰因素对应的最大偏差量，另一种是分别按偏差量的正负号进行求均方和。本书取第一种作法。

（1）以时间为自变量的返回轨道最大偏差量的计算方法

以时间为自变量的返回轨道最大偏差量的计算方法可用如下公式表示

$$\Delta W_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (W_{ij} - W_{oj})^2} \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

式中 i——第 i 条干扰返回轨道；

j——时间节点，从返回制动发动机点火时刻 $t=0$ 起至再入器开伞点时刻 $t=t_f$ 止的范围内以适当间隔取点；

W——需处理的轨道参数（如总攻角 η、过载等）；

W_{ij}——第 i 条干扰返回轨道在时间节点 j 的 W 值；

W_{oj}——标准返回轨道在时间节点 j 的 W 值；

ΔW_j——W 在给定时间节点 j 的最大偏差量。

实际计算中对 $\pm 3\sigma$ 引起的 $(W_{ij}-W_{oj})$ 要比较，将其中绝对值较大的 $(W_{ij}-W_{oj})$ 代入式(6-3-1)中进行运算。

将各时间节点的 W_{oj} 加上同一时间的 ΔW_j，则得到各参数 W_j

的上偏差值，将 $W_j(j=1,2,3\cdots)$ 在 $W\sim t$ 平面的各点连起来，则可得到上偏差 $W\sim t$ 曲线，用类似的方法可以得到下偏差 $W\sim t$ 曲线。典型返回式卫星的轨道高度对时间的曲线如图6-24所示。

$$\left.\begin{aligned} W_{j\max} &= W_{oj} + \Delta W_j \\ W_{j\min} &= W_{oj} - \Delta W_j \end{aligned}\right\} \tag{6-3-2}$$

（2）以高度为自变量的返回轨道最大偏差量的计算方法

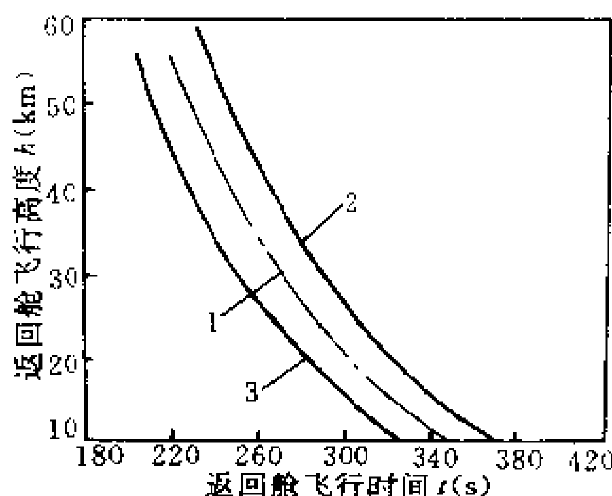


图6-24　典型返回式卫星的高度 h 与时间 t 关系曲线

1—标准 $h\sim t$ 曲线；2—上偏差 $h\sim t$ 曲线；3—下偏差 $h\sim t$ 曲线。

以高度为自变量的返回轨道最大偏差量的计算方法可用下列公式表达：

$$\Delta W_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(W_{ij} - W_{oj})^2} \tag{6-3-3}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{j\max} &= W_{oj} + \Delta W_j \\ W_{j\min} &= W_{oj} - \Delta W_j \end{aligned}\right\} \tag{6-3-4}$$

式中：i——第 i 条干扰返回轨道；

j——第 j 个高度节点；

W——需要计算的返回轨道参数；

W_{ij}——第 i 条干扰返回轨道在高度节点 j 处的 W 值；

W_{oj}——标准返回轨道在高度节点 j 处的 W 值；

$W_{j\max}$——在高度节点 j 处返回轨道参数 W 的最大值；

$W_{j\min}$——在高度节点 j 处返回轨道参数 W 的最小值；

ΔW_j——轨道参数 W 在高度节点 j 处的最大偏差量。

一典型返回式卫星的轴向过载系数 n_{x1} 随高度 h 的变化如图 6-25所示。

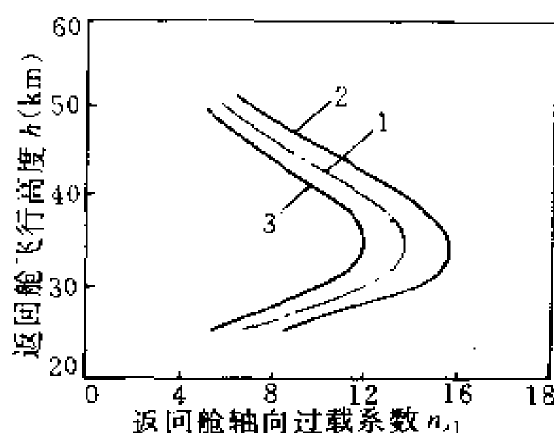


图6-25 一典型返回式卫星的轴向过载系数 n_{x1} 随飞行高度 h 的变化曲线

1—标准的 n_{x1} 曲线；2—上偏差的 $n_{x1}\sim h$ 曲线；3—下偏差的 $n_{x1}\sim h$ 曲线。

(3)返回轨道着陆点最大偏差量的计算方法

显然取式(6-3-3)和式(6-3-4)中的高度为着陆点的高度，即可以得到着陆点的最大偏差量，这里说明两点，在本书中着陆点实际指开伞点，因为着陆段的运动不属于本书讨论的范畴，只计算到开伞点，或者不开伞延伸到着陆点。另外算出落点的经纬度应换算成纵程和横程偏差，如何换算放在后面讨论，这里介绍取落点坐标系的方法计算纵向偏差和横向偏差。

取落点坐标系 $o_ox_Ly_Lz_L$ 如下：原点 o_o 在卫星的标准着陆点，o_ox_L 轴在过原点 o_o 的水平面内指向卫星前进的方向，o_oy_L 轴垂直

向上，$o_0x_Ly_Lz_L$ 组成右手坐标系。

根据各种偏差量的最大偏差，分别计算各偏差量产生的着陆点的纵向偏差 x_i 和横向偏差 z_i，然后按下式计算卫星着陆点的纵向最大偏差和横向最大偏差，即

$$x_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{6-3-5}$$

$$z_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} \tag{6-3-6}$$

式中：x_{max}——卫星着陆点的纵向最大偏差；

z_{max}——卫星着陆点的横向最大偏差；

x_i——第 i 个偏差量引起的着陆点纵向偏差；

z_i——第 i 个偏差量引起的着陆点横向偏差。

根据卫星着陆点的最大偏差可以确定卫星理论回收区的大小，其示意图如图6-26所示。

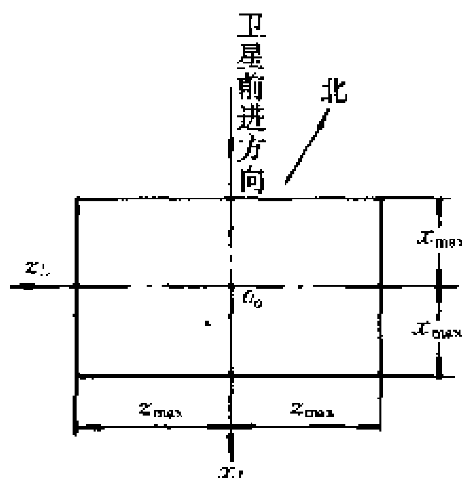


图6-26 卫星的理论回收区示意图

3. 用蒙特卡洛方法求落点偏差

为了分析各项偏差对落点偏差的综合影响，可以用蒙特卡洛方法进行分析。

首先用蒙特卡洛方法对返回过程的 m 个误差源随机抽样，产生 n 组随机误差

$$\varepsilon_i = [\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{mi}] \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{6-3-7}$$

然后分别对干扰轨道进行数值积分，求出有随机干扰作用下的实际轨道，再用求差法与标准着陆点进行比较，即可求落点偏差的大量样本 $\Delta x_i, \Delta z_i (i=1,2,\cdots,n)$。

根据数理统计理论，即可确定样本的方差

$$\sigma_x = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2\right)^{1/2} \tag{6-3-8}$$

$$\sigma_z = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta z_i^2\right)^{1/2} \tag{6-3-9}$$

可认为卫星返回轨道落点最大偏差

$$\Delta x_{\max} = 3\sigma_x \tag{6-3-10}$$

$$\Delta z_{\max} = 3\sigma_z \tag{6-3-11}$$

§6.4 载人飞船返回轨道设计

载人飞船属于弹道—升力式再入航天器，它与属于弹道式再入航天器的返回式卫星明显的区别在于通过配置再入器质心的办法，使再入器再入大气层时能产生一定的升力，但升力小于阻力，升阻比(L/D)小于0.5. 因为有升力作用，增加了飞船再入走廊的宽度，减小了再入大气层后最大过载和热流。又由于再入大气层后有升力，载人飞船在再入段可以通过滚动控制，改变升力矢量的方向，因而可以控制再入轨道，使其有一定的机动能力，这样，可以大大减小再入器着陆点的散布。

载人飞船还保留了弹道式再入航天器结构简单和防热易于处理的特点，所以载人飞船仍将得到广泛的应用。

因为飞船再入段有升力，可对其轨道进行控制，加上载人飞船上有航天员，故其对过载、热流和着陆点的精度要求不同于返回式卫星，其轨道设计也就不同于返回式卫星的轨道设计，要复杂一些。为与一般文献统一，下面的叙述中称载人飞船的再入器为飞船返回舱或简称返回舱。

§6.4.1 载人飞船轨道设计对总体设计的要求

为设计好载人飞船返回轨道，对载人飞船总体设计提出一系列要求，现分别叙述如下：

1. 对飞船返回舱气动外形的要求

大钝头倒锥的阻力系数十分大（阻力系数高达2以上），因此，一般弹道—升力式飞船返回舱都采用这种外形，以减小再入的过载峰值。采用大钝头倒锥的气动外形再加上适当选择升阻比和采用弹道—升力式控制等措施，将使再入过载峰值大大减小，例如"联盟"号飞船可使得再入过载峰值为3～4g。典型的弹道—升力式飞船的气动外形如图6-27所示，图中给出了飞船返回舱大底直径D_m与高度L_1的关系及曲率半径等。

2. 对飞船返回舱稳定特性的要求

（1）飞船返回舱在配平攻角下是静稳定的。

（2）保证返回过程（包括应急返回过程）中再入大气层时飞船返回舱应是大头朝前的飞行状态。

为了保证再入大气层后，大头朝前以利于飞船返回舱的防热和正常的返回姿态，在外形设计、气动布局时应保证当出现小头朝前状态时，能尽快调整到大头朝前的状态[25]。

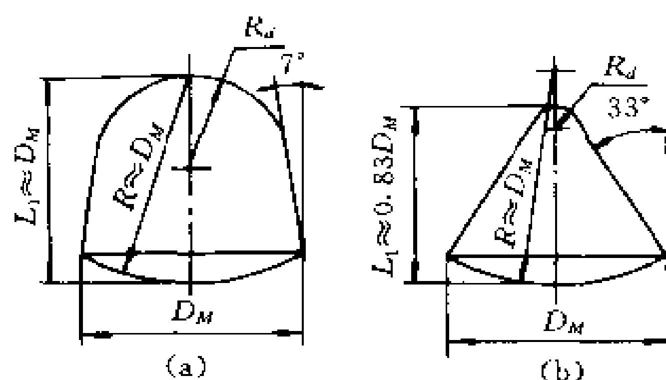


图6-27　典型的弹道—升力式返回舱气动外形理论图
(a)联盟号　　　　(b)阿波罗

3．对飞船返回舱控制的要求

弹道—升力式载人飞船返回舱一般选取球头倒锥式外形。对于这种气动外形飞行器，如不加姿态控制，在配平攻角点，虽是静稳定的，但却往往是动不稳定的，也就是说，当某种干扰使返回舱偏离配平攻角运动状态时，其后将在配平攻角附近产生增幅振荡，以致完全破坏配平攻角飞行状态，这是由于这种飞船返回舱的气动阻尼力矩往往是负阻尼力矩造成的。为此对于球头倒锥式外形的弹道—升力式载人飞船，在俯仰和偏航通道要采用速率阻尼控制，以保证载人飞船再入大气层的过程中在配平攻角附近运动。在滚动通道，通过控制飞船滚动角，从而控制飞船升力矢量在空间的方向，达到控制过载峰值和着陆点的目的，其详细情形将在后面讨论。

4．对运载火箭的要求

因为飞船本身有机动变轨能力，对运载火箭入轨精度要求可降低一些。可利用飞船的机动变轨能力改变飞船的运行高度，从而改变飞船的运行周期，使得返回圈的星下点轨道刚好与设计的返回圈星下点轨迹基本重合，以消除制动点的横向偏差。

5. 对载人飞船着陆场区的要求

着陆场区的位置对返回轨道设计有较大的影响，下面介绍国外情况和选择着陆场区的原则。

(1)国外载人飞船着陆场区情况

美国从60年代到70年代，先后发射了“水星”、“双子星座”和“阿波罗”三种系列的载人飞船。它们都在肯尼迪角发射，均在海上回收。而着陆场区有三处海面：大西洋海面，面积约210km×460km；北太平洋海面，面积约为520km×200km；南太平洋海面。

前苏联载人飞船有“东方”、“上升”和“联盟”系列飞船，它们都在拜科努尔发射场发射，均选择在陆上回收，着陆场区在卡拉干达地区，面积约为700km×600km，苏联“联盟”号系列飞船均在此回收。

(2)着陆场任务

着陆场主要任务有：

①利用各种测量设备捕获飞船返回舱，并进行跟踪测量；

②利用装有导航设备的飞机或直升飞机，测定飞船返回舱着陆点坐标，并将信息发送给指挥部门，以便飞机、直升机或搜索车辆赶赴现场；

③有关人员进入现场，帮助航天员出舱，并将他们送上直升机，送往指定地点；

④从返回舱取出有效载荷，并将返回舱送往指定地点。

(3)着陆场选择及要求

载人飞船着陆场选择应综合各种因素加以权衡，主要有飞船运行轨道及机动飞行能力，各国地理特点、地面跟踪台网布局及国家综合国力等。美国的飞船着陆场选在海上，因为它在全球各地有军事基地可以依托，海军和空军力量强、机动性好，所以它能根据飞船任务要求，选择不同的海域作为飞船的着陆场。前苏联飞船着陆场选在陆地，主要是它具有优越的地理条件、有广阔的哈萨克斯

坦草原。如果前苏联飞船着陆场选在海上，其困难就大得多：首先在西部和南部缺乏地面站支持和依托；而北部和东部海域纬度过高，飞船溅落后因海水温度低不利于航天员生存和海上作业；另外组织庞大的海上跟踪测量和回收救援部队，投人的人力和物力，远远大于陆上回收。中国的情况也是陆上回收更合适。下面以陆上回收研究选择场址的问题。通常对着陆场区的要求：

①着陆场区范围大，地域开阔

这里首先要说明着陆场区不是载人飞船的理论回收区。飞船的理论回收区是计入飞船返回过程中各种偏差量，计算得到的飞船着陆的预定区域，具体确定方法放在后面讨论。前苏联"联盟TM"号飞船理论回收区为半径20km～30km 的圆球区域，而着陆场区为700km×600km 的范围，理论回收区只是着陆场区的一部分。

着陆场区范围大是载人飞船着陆场的特点，原因是着陆场不仅要保证正常返回时降落在着陆场区，而且要保证在应急返回时也降落在着陆场区范围内。例如前苏联多次因空中发生故障而应急返回均降落在着陆场范围内，保证了安全降落。

②场区地势平坦，无大的江、河、湖泊

前苏联的飞船着陆场在哈萨克斯坦平原，地势平坦，非常便于对飞船跟踪测量，便于飞船安全着陆，便于搜索飞船，便于营救航天员和回收返回舱。但该地区有一个田吉兹湖，曾给飞船着陆后回收工作造成了麻烦。因此，着陆场内万一有湖泊、深沟等，设计理论回收区时应当避开它。

③场区内人口稀少

为确保飞船安全着陆，减少返回舱着陆时对地面造成的危害，减少对地面其它部门工作的损失和影响，很显然，着陆场必须选址在人口稀少的地区，场区内无大中型工矿企业，无重要军事设施，远离大中城市。

④场区应具备足够的跟踪测量能力

飞船在返回过程中处于地面跟踪台站的严密的测控监视之下，场区的跟踪测量是飞船地面测控网的一个组成部份。从场区看，飞船再入段出黑障区后轨道跟踪测量对飞船着陆点精度预报更为重要。前苏联着陆场区离拜科努尔发射场不到200km，这样，拜科努尔发射场的测控设备也可用于飞船的返回和回收测控。

⑤场区应具备有搜索和回收勤务保障的飞机和车辆

陆上回收的载人飞船着陆场应配备足够的飞机和车辆，才能在规定的时间内，找到飞船，将航天员撤离并送到指定地点，回收返回舱。

§6.4.2 载人飞船以配平攻角飞行的运动

1. 载人飞船以配平攻角飞行的运动

载人飞船同返回式卫星一个重要的区别在于再入大气层后，载人飞船在理想情况下是以配平攻角飞行，而返回式卫星是以零攻角飞行。

(1)配平攻角及以配平攻角飞行的定义

将载人飞船返回舱的质心位置偏离纵轴 δ，则当返回舱以固定的马赫数 M 和高度 h 飞行条件下，若以某一总攻角 η 飞行时，作用在返回舱上的空气动力对质心的力矩主矢量为零，则该总攻角 η 称为返回舱在马赫数 M 和高度 h 下的配平攻角，用 η_{tr} 表示。

其实，配平攻角就是略去力矩平衡过程最后达到总力矩为零时的攻角。当质心横移 δ 等于零时，该配平攻角为零。当质心横移不等于零时，为了达到力矩平衡，一定存在一个攻角，使其升力和阻力的力矩达到平衡，该攻角就是所谓的配平攻角。

从本质上讲，配平姿态就是弹道学中飞行器瞬时平衡状态。只是瞬时平衡是稳定力矩和控制力矩的瞬时平衡，而现在无控制力矩，但有质心横移，是稳定力矩本身的平衡而已。

以配平攻角飞行是指一种理想的飞行状态，返回舱再入大气层后，在无任何外力矩和内力矩的作用下，每时每刻都保持在当时 M 数和高度 h 下的配平攻角飞行。以配平攻角飞行是返回舱再入大气层后，实际飞行状态的一种有用的近似，它适用于研究和计算返回过程的再入段。以配平攻角飞行是一个很好的近似，其原因在于根据大气飞行器姿态动力学[5]的分析，由于绕质心运动相对而言比质心运动进行得快，在分析研究质心运动时，可略去绕质心运动，只考虑稳态情况。

(2)以配平攻角飞行的特性

①作用在返回舱上的空气动力主矢量 $\boldsymbol{R}$ 通过返回舱的压心和质心

根据定义，$\boldsymbol{R}$ 通过返回舱的压力中心，而如果 $\boldsymbol{R}$ 不通过返回舱的质心，则 $\boldsymbol{R}$ 将对返回舱的质心 o_1 产生力矩，而这与配平攻角的定义矛盾，故 $\boldsymbol{R}$ 必须通过返回舱的压心和质心。

②o_1y_1 轴在 $o_1x_1x_v$ 平面内，即 $\beta=0$

这是因为 $\boldsymbol{R}$ 通过返回舱的压心和质心，而压心在返回舱的几何轴线上，故 $\boldsymbol{R}$ 在平面 $o_1x_1y_1$ 内，即 $\boldsymbol{R}$ 在 o_1z_1 轴上的分量为零，故 $\beta=0$，也就是说 o_1y_1 必须在 $o_1x_1x_v$ 平面内。也可以这样理解，因为总空气动力 $\boldsymbol{R}$ 总是在 $o_1x_1y_1$ 平面内，所以 o_1x_v 轴也应在 $o_1x_1y_1$ 平面内，否则会产生侧力，故 o_1x_v 在 $o_1x_1y_1$ 平面内，按定义 $\beta=0$.

③以配平攻角飞行时应满足

$$C_N(x_p - x_g) = C_A\delta \tag{6-4-1}$$

因为从图6-1知

$$N(x_p - x_g) = A\delta$$

将上式除以 qS 即得式(6-4-1)。

④以配平攻角飞行时 $\alpha<0$

以配平攻角飞行时 $\beta=0$，o_1x_v 必须在 $o_1x_1y_1$ 平面内，此时 o_1x_v 的正向必须在 o_1x_1 轴的正向和 o_1y_1 轴正向所夹的90°之内，否则 $\boldsymbol{R}$

不能通过质心，故由 α 的定义，$\alpha<0$，因 $\beta=0$，即 $\eta_{tr}<0$。

这里要讨论一个问题，即 $\eta=\alpha<0$，但此时的升力 L 为什么是正的。从图6-1看出，若总空气动力矢 $\boldsymbol{R}$ 在速度反方向延长线的上方，如图6-1所示，则升力 L 为正值；当总空气动力矢 $\boldsymbol{R}$ 在速度反方向延长线的下方，则升力 L 为负值；而当总空气动力 $\boldsymbol{R}$ 与速度反方向同向，则只存在阻力，升力为零。

下面求升力 $L=0$的条件，设 η^* 时 $L=0$

$$L = A\sin|\eta^*| - N\cos|\eta^*| = 0$$

因
$$N = \frac{A\delta}{(x_p - x_g)}$$

则
$$\operatorname{tg}|\eta^*| = \frac{\delta}{x_p - x_g} \tag{6-4-2}$$

故当配平攻角为 η 时，升力的正负号由下式决定

$$\left.\begin{array}{ll} L>0 & \text{当 } |\eta|>|\eta^*| \\ L=0 & \text{当 } |\eta|=|\eta^*| \\ L<0 & \text{当 } |\eta|<|\eta^*| \end{array}\right\} \tag{6-4-3}$$

显然对载人飞船返回舱，当 $\alpha<0$时，$L>0$必须满足 $|\alpha|=|\eta|>|\eta^*|$，图6-1是满足这一条件的。

(3)配平攻角的求法

C_N、C_A、x_p 是攻角 η、马赫数 M 和高度 h 的函数，而返回舱以配平攻角飞行时 $\eta_{tr}=\alpha_{tr}$，所以对应一定的 M 和 h 值，若某一 η(或 α)值对应的 C_A、C_N 和 x_p 满足式(6-4-1)，则该总攻角 η(或 α)就是返回舱在该 M 和 h 下的配平攻角。

若近似认为当 M 较大时，C_A 只与 M、h 有关，而 $C_N=C_N^\eta\eta$，则由式(6-4-1)可得：

$$\eta_{tr} = \frac{C_A\delta}{C_N^\eta(x_p - x_g)} \tag{6-4-4}$$

可见 η_{tr}与重心横移成线性关系，δ 愈大则 η_{tr}愈大。因为 δ 的大

小受限制，所以配平攻角的大小有一定的限制。

2. 配平攻角和升阻比的选择

配平攻角的大小受到重心横移 δ 的限制，不能过大，所以产生的升力和阻力相比，不会超过0.5。

载人飞船返回舱的外形、配平攻角和升阻比的选取是由多种因素决定的。前苏联和美国的第二代飞船(前苏联的“联盟”号和“联盟 T”号，美国的双子星座)都选用弹道—升力式再入方式，表6.1列出了几种载人飞船返回舱升阻比和最大过载值。

表6.1 几种载人飞船的最大减速过载

型号	返回舱的升阻比 C_L/C_D	最大再入过载(g_0)
“东方”号	0	9～10
“水星”号	0	7.7～8
“双子星座”号	0.22～0.10①	4～5
“联盟”号	0.3	3～4
“联盟 T”号	0.3	3～4

①根据四次“双子星座”飞行的结果。

从表6.1可见“联盟”号飞船最大过载低于“双子星座”号的值，其主要原因是“联盟”号飞船比“双子星座”飞船具有更大的升阻比。

§6.4.3 载人飞船标准返回轨道设计原则

载人飞船标准返回轨道设计与卫星标准返回轨道设计不同之处在于返回舱在再入段，其轨道可以进行控制，它既可以使轨道平缓，减小最大过载与热流，还可以通过控制滚动角，改变升力在铅垂方向和水平方向的分量，控制其轨道，可以在一定范围内控制返

回舱的着陆点位置。

载人飞船标准返回轨道设计是从制动点到开伞点这一飞行段的轨道设计。包括以下三个问题：

①制动点位置的确定；

②制动参数的选择；

③再入段运动规律的设计。

关于制动参数的选择，主要是制动发动机推力大小、方向和工作时间的选择。关于推力大小和方向的确定方法前面已经讨论。制动发动机工作时间要保证再入到再入点 e 时，确保再入角 Θ_e 满足要求。

而制动点位置的选择要与再入段运动规律设计结合起来，确保着陆点的位置满足设计要求。

1．载人飞船再入段的运动特点

从第二章§2.5.1讨论知，在三自由度弹道仿真时，只要给出 α、β、ν 的变化规律便可以唯一地确定质心轨道。载人飞船标准返回轨道设计一般用三自由度弹道仿真模型、采用配平攻角飞行的假设。根据配平攻角飞行假设，攻角 α 等于配平攻角 η_{tr}。当 M、h 已知时，η_{tr} 根据配平攻角时的气动系数表可认为是已知的，而侧滑角 $\beta=0$，所以唯一能改变的是倾侧角 ν，再入段运动规律设计，实际上就是倾侧角 ν 变化规律的设计。

因为 $\beta=0$，$\eta=\alpha$，$L=Y$，$Z=0$。图6-28画出返回坐标系、速度坐标系和半速度坐标系的关系

当有倾侧角 ν 时，总升力在铅垂面 o_1y_h 上投影为 $L\cos\nu$，而在 o_1z_h 上的投影为 $L\sin\nu$。

$$\begin{bmatrix} R_{xh} \\ R_{yh} \\ R_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ L\cos\nu \\ L\sin\nu \end{bmatrix} \tag{6-4-5}$$

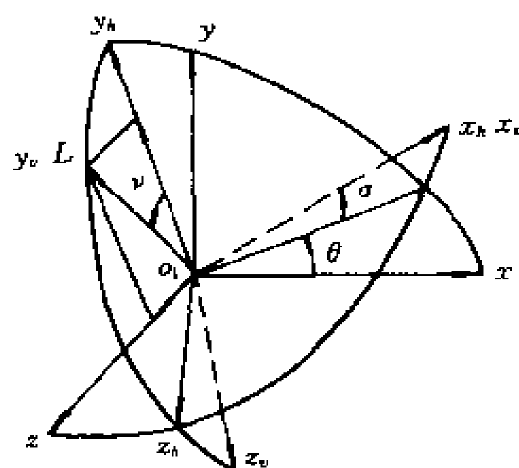


图6-28 总升力 L 在 o_1y_h、o_1z_h 上的投影

利用图6-28和式(6-4-5)可得到如下看法：

①总升力 L 在 o_1y_h 上的投影 $L\cos\nu$ 的大小直接与返回舱下降的快慢有关，$|\nu|$ 过大，$L\cos\nu$ 减小，下降速度快，会使过载和热流增加，等效于升阻比减小，所以 $|\nu|$ 值过大是不行的。

②倾侧角 ν 恒等于零也是不行的。$\nu\equiv0$，侧向力 $L\sin\nu\equiv0$，因此无侧向机动能力。但实际飞行时，星下点轨迹不一定通过预计的着陆点，为了减小横向偏差一定要留有横向机动能力。另外 $\nu\equiv0$，虽然在 oy_h 上投影 $L\cos\nu$ 在标准情况下达到最大，但当实际飞行时，如果还需增加升力，则无法提供多余的升力。为此，为了给纵向制导留有机动能力，给侧向留有机动能力，在标准返回轨道设计时一定要留有余量，即只能把升力的绝大部分用于纵向，而其余的用于纵向制导和侧向机动。设返回舱的升力为 L，而用于标准返回轨道设计纵向的升力为 KL，K 为余量系数，通常取0.6～0.8. 设标准返回轨道的倾侧角为 ν_0，则 $KL=L\cos\nu_0$，即 $K=\cos\nu_0$. 但习惯上不用升力的多少来表示余量，而用升阻比，即纵向升阻比 $(L/D)_0=K(L/D)=(L/D)\cos\nu_0$，故 $K=\cos\nu_0$.

③设计标准返回轨道应留有余量，ν_0不等于零，存在侧力$L\sin\nu_0$，当ν_0不改变符号，返回舱将向一个方向运动，这是不允许的。为此应改变ν_0的符号，使不要求的侧向运动相互抵消，且改变符号不影响纵向升力的大小和方向。

综上所述，标准再入段运动规律设计就是设计一个倾侧角$\nu_0(t)$，它既不是恒等零，也不能很大（如90°），但要正负交替。

2. 倾侧角$\nu(t)$与纵程和横程的关系

为了研究$\nu(t)$与纵程和横程的关系，假设原运行轨道的星下点轨迹通过预计的着陆点。取攻角为配平攻角η_{tr}，侧滑角$\beta=0$，而$\nu(t)$取不同的常数值，可以得到表6.2和图6-29.

从表6.2和图6-29看出：

①$\nu=$常值时，当$\nu=0$时，纵程最大，$\nu=45°$时，横程（或横向机动距离）最大；

②ν值为常值时，ν值不能过大，当ν值超过60°时，其最大法向过载超过4g，这是不允许的。

表6.2　不同ν_0值时纵程、横程、最大过载的关系

序号	ν_0(度)	n_m(g)	横程(m)	纵程(m)
1	0	−2.24	0	3973969.75
2	15	−2.27	96499.0	3862355.75
3	30	−2.51	166621.98	3546459.50
4	45	−3.12	215285.19	3132445.25
5	60	−3.77	214066.09	2668651.25
6	75	−5.13	179174.42	2268140.50
7	90	−8.56	136420.20	1992350.87
8	−15	−2.26	−90719.40	3871925.25

序号	ν_0(度)	n_m(g)	横程(m)	纵程(m)
9	−30	−2.47	−153934.40	3577238.25
10	−45	−3.07	−177296.52	3151910.25
11	−60	−3.71	−161776.42	2685960.25
12	−75	−5.02	−118753.56	2280150.50
13	−90	−8.41	−73012.53	2000212.75

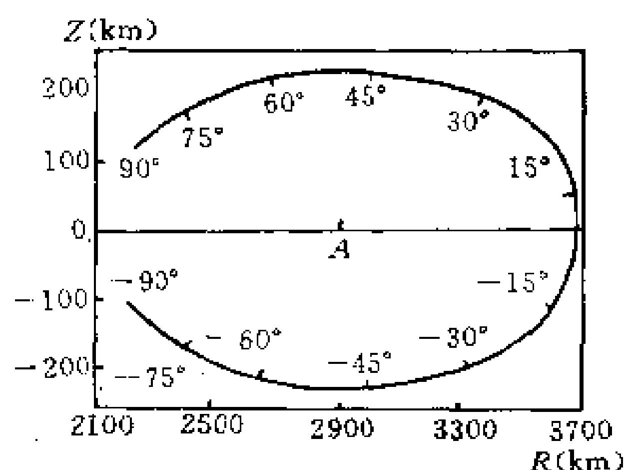


图6-29 倾侧角ν、纵程和横程的关系图

再举一例说明倾侧角瞬时改变符号对航程的影响。该计算以制动点为计算地面航程的起点，倾侧角 ν 除等于常值外，还有按等时间间隔交替出现的情况，计算时再入速度 v_e，再入角 Θ_e 取相同的值，(L/D)约为0.3.

计算结果如表6.3和图6-30.

从表6.3和图6-30看出：

①$\nu(t)=20°$，$\nu(t)=-20°$和 $\nu(t)$等于±20°交替出现，其纵向航程相差不大，约10km 以内。类似的±40°，±60°也差别不大。

②当$|\nu|$取值在60°以内时，其最大过载小于4g.

综上所述，倾侧角 ν 改变符号对纵向影响不大，但对横程可以起到控制作用。

表6.3 不同 $\nu(t)$ 时最大过载、航程的关系

参数名称 / 参数数值 / 方案号	再入过程的倾侧角 $\nu(°)$	再入过程的最大过载系数 n_{max}	返回时刻星下点到着陆点的地面航程 S_δ(km)
1	0	−2.3	18386
2	20	−2.3	18220
3	−20	−2.4	18228
4	20与−20交替	−2.3	18230
5	40	−2.6	17797
6	−40	−3.0	17760
7	40与−40交替	−2.9	17795
8	60	−3.4	17230
9	−60	−3.9	17156
10	60与−60交替	−3.5	17231

3. 倾侧角 $\nu(t)$ 大小和符号的选择

(1)倾侧角大小的选择

若 $\nu(t)$ 取一常值，可取40°左右，既可以保证有一定的横向机动能力，也不致升阻比在纵向下降过多。前面例2的±40°交替出现轨道可作为标准返回轨道。

如从优化轨道的角度讲，倾侧角的大小直接影响减速过载、热流的大小和航程的远近，ν 的大小可以按过载的限制及使过载均匀化的原则，选取为随时间减小的分段常数值。在高空段，$|\nu|$ 可以大一些，因为此时动压小，过载可迅速增加，但数值不大，而低空

段，$|\nu|$应小一些，因此时动压大，下降过快会使过载超过允许值。

此外$|\nu|$的大小选择，还受着陆场区的影响，当载人飞船控制系统在空中运行出现故障时，返回舱不能以弹道—升力式再入，为了平衡配平升力，要改成弹道式再入，即让返回舱自旋降落，此时轨道称为自旋轨道，由于无升力其航程短，但着陆点仍应在着陆区内。因此在设计标准返回轨道时，正常返回的着陆点与自旋轨道的着陆点不应相差过远，为此高空段$|\nu|$应大一些，以减小航程，否则着陆场区过大。

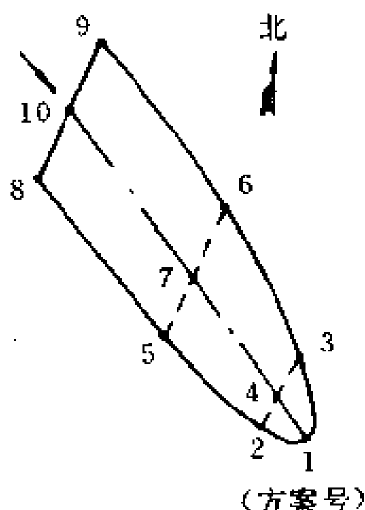


图6-30 不同$\nu_0(t)$时着陆点的位置

(2)倾侧角$\nu(t)$符号的确定

确定$\nu(t)$的符号，或者说确定ν角反向时刻有不同的作法。简单的如表6.3所示取等值的ν，按等时间间隔反向，例如时间间隔为100s，每过100s反向一次，如图6-31所示。

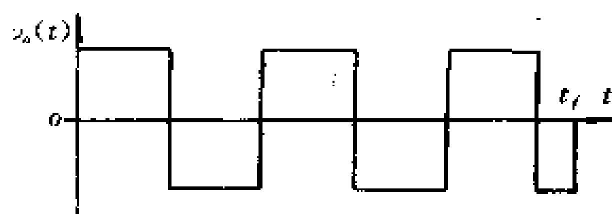


图6-31 $\nu_0(t)$随时间等间隔反向示意图

此方法存在的问题一个是设计标准返回轨道时，如何调整时间间隔使$t=t_f$时，横程正好在允许的误差之内。此时纵程可以通

过调整制动点的位置使之满足要求。另一个问题是实际飞行时，由于存在着干扰，如何调整 $\nu(t)$ 使横程满足要求。

为了使标准返回轨道设计时确定 $\nu(t)$ 符号的方法与实际飞行中确定 $\nu(t)$ 符号的方法一致，在标准返回轨道设计中引入侧向制导思想，关于侧向制导的详细内容放在后面讨论，这里先引入其思路。

从前面的分析看出，ν 的正负号不影响升力分量 $L\cos\nu$ 的方向，只影响侧力 $L\sin\nu$ 的方向。因此可考虑设计一个侧向边界，使飞船的标准返回轨道控制在边界之内，而边界的中心线就是再入点 e 和开伞点 f 的星下点联成的大圆弧，因为开始允许横程偏差大一些，而开伞点处的横程要小一些，所以此边界应设计成漏斗形。注意到 $\nu_0(t)$ 的反号不等于侧向位移的反号，只是侧力引起的侧向加速度反号，为了防止侧向运动过调，不使飞船在漏斗之外运动，在侧向制导规律中要加上阻尼项 $K_5\dot{Z}$，用以改善侧向运动性能。

选取的侧向制导规律为：

$$\nu_0(t)=\begin{cases}-|\nu^{\sim}|sign(Z+K_5\dot{Z}) & 当\ |Z+K_5\dot{Z}|\geqslant\bar{Z}\\ |\nu^{\sim}|sign[\nu_0(t-\Delta t)] & 当\ |Z+K_5\dot{Z}|<\bar{Z}\end{cases}\tag{6-4-6}$$

其中 $\nu^{\sim}$ 为标准返回轨道倾侧角的大小；

$K_5\dot{Z}$ 为侧向阻尼项，K_5 为阻尼系数，现取为

$$K_5=C_3+C_4v/v_e\tag{6-4-7}$$

$\bar{Z}$ 为漏斗边界，现取为

$$\bar{Z}=C_1+C_2v/v_e\tag{6-4-8}$$

v_e 为再入时刻速度，v 为飞船当前的速度，C_1、C_2、C_3和 C_4均为可调参数。

再入段运动规律可供调整的参数有 $\nu^{\sim}$ 的分段常数值的大小

及侧向制导中的可调参数 C_1、C_2、C_3和 C_4. 这些参数的选取既要考虑 ν 角反向次数的多少，次数不宜过多，以3～4次为宜，又要考虑侧向运动不过调、满足最大过载限制。它要在返回轨道设计、再入制导规律设计中合理选择。

§6.4.4 返回轨道设计的数学模型

标准返回轨道设计采用三自由度质心运动的运动方程，其控制变量为 α、β、ν. 根据配平攻角飞行假设，攻角等于配平攻角 η_{tr}，侧滑角 $\beta=0$，而 $\nu(t)$ 通过标准返回轨道设计原则可以确定，则可以写出其运动方程。

标准返回轨道的数学模型既可以在返回坐标系建立，也可以在半速度坐标系建立，下面写出在返回坐标系建立的数学模型。

1. *质心运动方程*

由式(2-5-1)可以得质心运动方程如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{z1}\end{bmatrix}+\frac{g'_r}{r}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix}+\frac{g_{\omega e}}{\omega_e}\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\ \omega_{ey}\\ \omega_{ez}\end{bmatrix}+\frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_{cx}\\ F_{cy}\\ F_{cz}\end{bmatrix}+$$

$$\frac{\boldsymbol{O}_B}{m}\begin{bmatrix}-C_AqS\\ C_NqS\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta}\\ -C_NqS\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta}\end{bmatrix}-\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\ y+R_0\\ z\end{bmatrix}-\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}4\text{-}9)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}4\text{-}10)$$

为便于实际计算，式(6-4-9)中推力和空气动力的表达式要稍作修改。

(1)推力

载人飞船制动发动机的推力在制动段才有，为便于控制推力方向，制动段推力方向选择在惯性空间的固定方向，即要求推力方向在惯性空间是固定的。

设推力与返回惯性坐标系的关系如图6-32所示，推力 P 沿 o_1x_1 方向，在惯性空间为常矢量，图中 φ_p、ψ_p 分别为推力姿态俯仰角、偏航角。且 $\varphi_p=\varphi_r$，$\psi_p=0$。

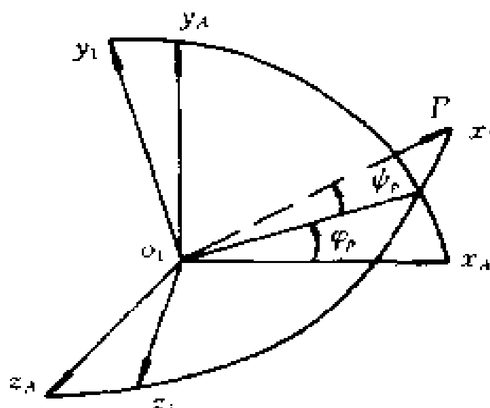


图6-32 在返回惯性坐标系中的推力矢量

设推力在飞船的纵轴方向，则

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-4-11}$$

在制动时刻，将 P_{x1}、P_{y1} 和 P_{z1} 投影到返回惯性坐标系

$$\begin{bmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ P_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\cos\psi_p\cos\varphi_p \\ P\cos\psi_p\sin\varphi_p \\ -P\sin\psi_p \end{bmatrix} \tag{6-4-12}$$

将惯性空间固定的推力投影到返回坐标系，则

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_A \begin{bmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ P_{zA} \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_A \begin{bmatrix} P\cos\psi_p\cos\varphi_p \\ P\cos\psi_p\sin\varphi_p \\ -P\sin\psi_p \end{bmatrix} \tag{6-4-13}$$

O_A 的表达式见式(2-2-29)。

(2)空气动力

当利用气动力系数为 C_A、C_N 时，可用式(6-4-9)计算空气动力在返回坐标系中的投影。为了突出倾侧角 ν 的作用，如果利用阻力系数 C_x，升力系数 C_y 和倾侧角 ν，则

$$\begin{bmatrix} R_{xh} \\ R_{yh} \\ R_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ L\cos\nu \\ L\sin\nu \end{bmatrix} \tag{6-4-14}$$

投影到返回坐标系则

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = O_H \begin{bmatrix} -D \\ L\cos\nu \\ L\sin\nu \end{bmatrix} \tag{6-4-15}$$

(3)起始条件

设原运行轨道为圆轨道，则

$$\begin{bmatrix} v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \\ v_z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu/r_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_e r_0 \cos\phi_0 \sin A_0 \\ 0 \\ \omega_e r_0 \cos\phi_0 \cos A_0 \end{bmatrix} \tag{6-4-16}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 - R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-4-17}$$

控制力 F_c 的计算，因其较小，在初步标准返回轨道设计时可略去。

2. 制导方程

设计标准返回轨道只要确定 α、β 和 ν. 现 $\alpha=\eta=\eta_{tr}$，$\beta=0$，ν_0按下式确定：

$$\nu_0(t) = \begin{cases} -|\nu^{\sim}|\,sign(Z + K_5\dot{Z}) & \text{当 } |Z + K_5\dot{Z}| \geqslant \bar{Z} \\ |\nu^{\sim}|\,sign[\nu_0(t - \Delta t)] & \text{当 } |Z + K_5\dot{Z}| < \bar{Z} \end{cases} \tag{6-4-18}$$

其中$v^{\sim}$的大小应由设计者根据要求给定，再通过迭代方法加以修正。

$$K_5 = C_3 + C_4(v/v_e) \tag{6-4-19}$$

$$\bar{Z} = C_1 + C_2(v/v_e) \tag{6-4-20}$$

C_1、C_2、C_3和C_4为可调参数。

3. 辅助计算方程

(1)质量计算

在制动段 $m=m_0-\dot{m}T$

在再入段 $m=m_p=$常值

$\dot{m}$ 为质量秒消耗量，在已知推力大小和比冲 I_{sp}时，$\dot{m}$ 的计算式为

$$\dot{m} = \frac{P}{I_{sp} \cdot g_0} \tag{6-4-21}$$

g_0为地面重力加速度，现取 $g_0=9.8\text{m/s}^2$.

(2)地理位置

地理位置包括地心纬度ϕ、经度λ、地心距r、星下点的大地纬度B和飞行器质心处的高度h. 其定义见图2-17. 计算公式如下：

$$\phi = \arcsin \frac{x\omega_{ex} + (y + R_0)\omega_{ey} + z\omega_{ez}}{r\omega_e} \tag{6-4-22}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \text{arctg}\,\frac{Y}{X} \tag{6-4-23}$$

$$r = (x^2 + (y + R_0)^2 + z^2)^{1/2} \tag{6-4-24}$$

其中λ_0——返回制动时刻飞船的经度位置；

X、Y——地心矢在地心坐标系 $O_E-X_EY_EZ_E$ 上的分量。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = E_O \begin{bmatrix} x \\ y + R_0 \\ z \end{bmatrix} \tag{6-4-25}$$

$$R_0 = \frac{a_e b_e}{\sqrt{a_e^2 \sin^2\phi + b_e^2 \cos^2\phi}} \tag{6-4-26}$$

求星下点大地纬度 B、地心纬度 ϕ_e 和飞行高度 h 要通过下列方程迭代求出

$$\left.\begin{aligned}
&B = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\phi_e / e^2) \\
&R_e = \frac{a_e e}{\sqrt{\sin^2\phi_e + e^2 \cos^2\phi_e}} \\
&h = [r^2 - R_e^2 \sin^2(B - \phi_e)]^{1/2} - R_e^2 \cos(B - \phi_e) \\
&\Delta\phi_e = \arcsin(h \sin(B - \phi_e)/r) \\
&\phi_e = \phi - \Delta\phi_e
\end{aligned}\right\} \tag{6-4-27}$$

(3)过载

设总过载 n 在半速度坐标系中的过载分量为(n_{xh}、n_{yh}、n_{zh})，在返回舱坐标系中的过载分量为(n_{x1}、n_{y1}、n_{z1})，在速度坐标系中的过载分量为(n_{xv}、n_{yv}、n_{zv})。由过载的定义有

$$n = \frac{R}{m_p g_0} \tag{6-4-27}$$

$$\begin{bmatrix} n_{xh} \\ n_{yh} \\ n_{zh} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_p g_0} \begin{bmatrix} -D \\ L\cos\nu \\ L\sin\nu \end{bmatrix} \tag{6-4-28}$$

$$\begin{bmatrix} n_{xv} \\ n_{yv} \\ n_{zv} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_p g_0} \begin{bmatrix} -D \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-4-29}$$

$$\begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = B_v \begin{bmatrix} n_{xv} \\ n_{yv} \\ n_{zv} \end{bmatrix} \tag{6-4-30}$$

$$n = (n_{xh}^2 + n_{yh}^2 + n_{zh}^2)^{1/2} \tag{6-4-31}$$

(4)以配平攻角飞行时姿态角的计算

根据前面§2.5.3的讨论，当已知标准返回轨道的攻角 α_{tr}、侧滑角 $\beta=0$ 和倾侧角 ν 时，又由轨道计算可以得速度倾角 θ 和航迹偏航角 σ，则利用八个欧拉角的关系，可以确定配平状态下飞行时的姿态角。利用式(2-5-24)-(2-5-26)，再令 $\beta=0$ 可以得：

$$\left.\begin{aligned}
&\psi = \arcsin(\cos\alpha_{tr}\sin\sigma - \sin\alpha_{tr}\cos\sigma\sin\nu) \\
&\qquad\qquad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2 \\
&\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi \\
&\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \qquad -\pi < \gamma \leqslant \pi
\end{aligned}\right\} \tag{6-4-32}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{1}{\cos\psi}(\cos\alpha_{tr}\sin\theta\cos\sigma + \sin\alpha_{tr}\sin\theta\sin\sigma\sin\nu \\
&\qquad + \sin\alpha_{tr}\cos\theta\cos\nu) \\
\cos\varphi &= \frac{1}{\cos\psi}(\cos\alpha_{tr}\cos\theta\cos\sigma + \sin\alpha_{tr}\cos\theta\cos\sigma\sin\nu \\
&\qquad - \sin\alpha_{tr}\sin\theta\cos\nu) \\
\sin\gamma &= \frac{1}{\cos\psi}(\sin\alpha_{tr}\sin\sigma + \cos\alpha_{tr}\cos\sigma\sin\nu) \\
\cos\gamma &= \frac{1}{\cos\psi}\cos\sigma\cos\nu
\end{aligned}\right\} \tag{6-4-33}$$

在实际数值仿真计算中，不必由式(6-4-32)和式(6-4-32)来计算 φ、ψ、γ. 直接由方向余弦阵求 φ、ψ、γ 更方便一些。由于

$$\boldsymbol{B}_O(\varphi、\psi、\gamma) = \boldsymbol{B}_V(\alpha、\beta)\boldsymbol{V}_O(\theta、\sigma、\gamma)$$

当已知上式右端各元素后，便可以求出 $\boldsymbol{B}_O$

记

$$B_\Theta(\varphi、\psi、\gamma) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

观察式(2-2-31)，于是

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{tg}(b_{12}/b_{11}) \\ \psi &= -\arcsin(b_{13}) \\ \gamma &= \mathrm{arctg}(b_{23}/b_{33}) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}34)$$

4. 航程、纵程和横程的计算

(1)航程、纵程和横程的定义

①在球面上定义纵程和横程

在§4.2.2节已定义了总射程、纵程和横程，总射程在航天动力学中也叫航程。定义纵程和横程时把地球近似看成是圆球，e 点是再入点的地心矢与过标准开伞点 $f^{\sim}$ 的球面的交点。以 e 点和标准开伞点 $f^{\sim}$ 组成的大圆弧为准，沿 $ef^{\sim}$ 大圆弧飞过的距离为纵程，垂直于 $ef^{\sim}$ 大圆弧的垂直距离(也是弧线)为横程。这种定义方法是载人飞船再入制导规律所要求的。

一般纵程和横程的定义是以制动点的地心矢与地球表面的交点 o(即以返回坐标系的原点)和标准开伞点的星下点 $f^{\sim}$ 组成的大圆弧为准，沿 $of^{\sim}$ 大圆弧的纵向航程为纵程，垂直于 $of^{\sim}$ 大圆弧的垂线距离为横程，二者稍有区别，其示意图如图6-33所示。图6-33是放大了横程的比例，实际上图示的 ee' 与 oe' 相比，是很小的，某一计算例子，ε_2 仅为1.4°.

因再入制导需要的是以 $ef^{\sim}$ 大圆弧为准确定纵程和横程，故下面的讨论均以 e 点为计算起点。

上述定义在球面上的纵程和横程，如图4-2所示，由式(4-2-31)和式(4-4-32)看出，求纵程和横程要用到很多三角运算，

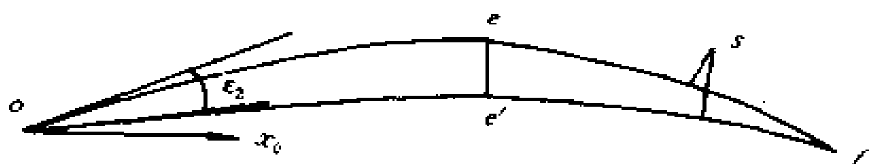


图6-33 制动点、再入点、开伞点的星下点关系图

而这是载人飞船导航制导计算希望避免的。

②用垂线定义纵程和横程

定义由标准返回轨道再入点 e 的地心矢 r_e 和标准开伞点 $f^{\sim}$ 的地心矢 r_f 组成的平面为标准再入纵平面，飞船再入时在此平面内运动为纵向运动，偏离此平面的运动为横向运动。

如图6-34所示，O_E 为地心，e 为再入点，$f^{\sim}$ 为标准开伞点，e、$f^{\sim}$ 的地心矢为 r_e、r_f，而 S 为任一时刻飞船所在的空间位置，简称计算点或当前点，地心矢为 r_o，由飞船当前位置作标准再入纵平面

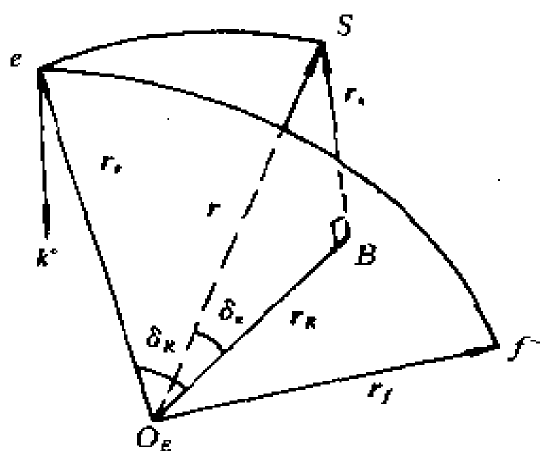


图6-34 标准再入纵平面

的垂线（直线）交标准再入纵平面于 B 点，则可将 r 表示成

$$r = r_R + r_z \tag{6-4-35}$$

且 r_R 垂直于 r_z，r_R 是 r 在标准再入纵平面上的投影向量，r_z 是 r 在垂直标准再入纵平面的向量上的投影向量。定义 δ_R 为再入纵程

δ_R 为纵程，δ_z 为横程角，Z 为横程，称 r 与 r_e 之间的夹角为航程角 δ_b，航程为 S_b，则计算纵程、横程和航程的公式为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_R &= \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{r}_R}{r_e r_R}\right) \\ R &= (R_p + h_f)\delta_R\end{aligned}\right\} \tag{6-4-36}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_z &= \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_R}{r r_R}\right) \\ z &= (R_p + h_f)\delta_z\end{aligned}\right\} \tag{6-4-37}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_b &= \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{r}}{r_e r}\right) \\ S_b &= (R_p + h_f)\delta_b\end{aligned}\right\} \tag{6-4-38}$$

式中 R_p 为地球平均半径，一般取 $R_p = 6371.004\text{km}$，h_f 为标准开伞点高度（或着陆点高度）。当研究开伞点精度问题时，可取 $h_f = 10\text{km}$。

为简化计算，也可以定义 S 点到标准再入纵平面的垂直距离为横程，即

$$Z = r_z \tag{6-4-39}$$

这三个定义稍有区别，如图6-35所示。SO_EB 平面垂直于标准再入纵平面，S 是计算点，f' 是计算点的地心矢与球面的交点，$f'f''$ 是球面上定义的横程，也是由式(6-4-37)定义的横程，而 SB 则是由式(6-4-39)定义的横程。从图6-35看出，当 δ_z 较大时，圆弧 $f'f''$ 与直线段 SB 是有区别的，但当 δ_z 很小时，且计算点 S 离开伞点愈近，二者的区别就愈小。

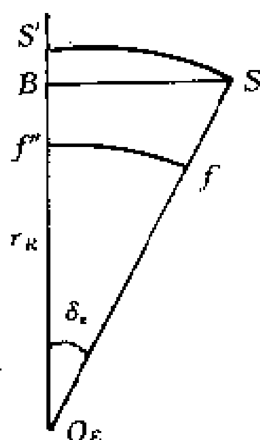


图6-35 不同定义的横程示意图

(2)纵程、横程及其变化率的计算

方法

再入制导不仅需要计算纵程和横程，且需要求其变化率。R、Z、$\dot{R}$、$\dot{Z}$的定义不同，其计算方法也不同。究竟采用何种定义和计算方法要视计算精度和工程实现的难易程度而定。

①球面上定义的纵程、横程及其变化率的计算方法

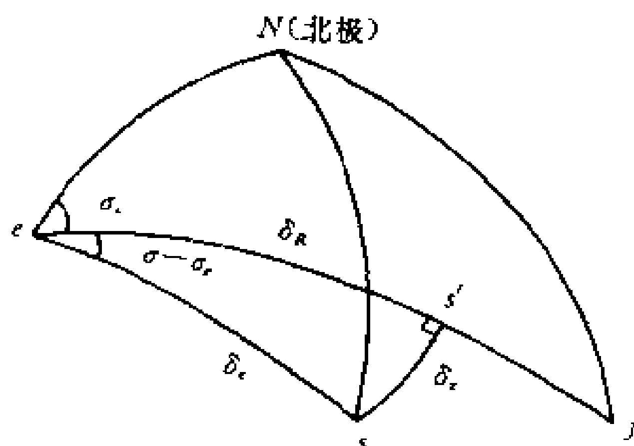


图6-36 球面上定义的纵程和横程

如图6-36，近似将地球看成半径为R_p的圆球，图中e、f、s分别为再入点、开伞点、计算点的地心矢与过开伞点的圆球表面的交点。记大圆弧es、ef与正北方向的夹角分别为σ、σ_e，过s作ef的垂线(大圆弧线)交ef于s'点，设δ_z、δ_R、δ_e分别为ss'、es'、es对应的地心角，则由球面三角形ess'知

$$\sin\delta_z = \sin\delta_e \sin(\sigma-\sigma_e) \tag{6-4-40}$$

$$\cos\delta_R = \cos\delta_e / \cos\delta_z \tag{6-4-41}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\sigma &= \frac{\sin(\lambda-\lambda_e)}{\cos\phi_e \mathrm{tg}\phi - \cos(\lambda-\lambda_e)\sin\phi_e} \\ \mathrm{tg}\sigma_e &= \frac{\sin(\lambda_f-\lambda_e)}{\cos\phi_e \mathrm{tg}\phi_f - \cos(\lambda_f-\lambda_e)\sin\phi_e} \end{aligned}\right\} \tag{6-4-42}$$

$$\cos\delta_e = \sin\phi_e\sin\phi + \cos\phi_e\cos\phi\cos(\lambda - \lambda_e) \qquad (6\text{-}4\text{-}43)$$

故

$$\left.\begin{aligned} Z &= (R_p + h_f)\delta_z \\ R &= (R_p + h_f)\delta_R \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}44)$$

为了求

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z} &= (R_p + h_f)\dot{\delta}_z \\ \dot{R} &= (R_p + h_f)\dot{\delta}_R \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}45)$$

需求 $\dot{\delta}_z$、$\dot{\delta}_R$，利用式(6-4-40)和式(6-4-41)可得：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\delta}_z &= \frac{\cos\delta_e\sin(\lambda - \lambda_e)\dot{\delta}_e + \sin\delta_e\cos(\sigma - \sigma_e)\dot{\sigma}}{\cos\delta_z} \\ \dot{\delta}_R &= \frac{\cos\delta_z\sin\delta_e \cdot \dot{\delta}_e - \cos\delta_e\sin\delta_z\dot{\delta}_z}{\sin\delta_R\cos^2\delta_z} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}46)$$

由式(6-4-46)知求 $\dot{\delta}_z$、$\dot{\delta}_R$ 需知 $\dot{\sigma}$、$\dot{\delta}_e$

利用式(6-4-43)和式(6-4-42)知

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_e = -&[\sin\phi_e\cos\phi\,\dot{\phi} - \cos\phi_e\cos(\lambda - \lambda_e)\sin\phi\,\dot{\phi} \\ &- \cos\phi_e\cos\phi\sin(\lambda - \lambda_e)\dot{\lambda}]/\sin\delta_e \end{aligned} \qquad (6\text{-}4\text{-}47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = &[\cos\phi\cos(\lambda - \lambda_e)\sin\delta_e\dot{\lambda} - \sin\phi\sin(\lambda - \lambda_e) \cdot \\ &\sin\delta_e\,\dot{\phi} + \cos\phi\sin(\lambda - \lambda_e)\cos\delta_e\dot{\delta}_e]/(\cos\sigma\sin^2\delta_e) \end{aligned} \qquad (6\text{-}4\text{-}48)$$

要求 $\dot{\delta}_e$、$\dot{\sigma}$ 又需知 $\dot{\phi}$、$\dot{\lambda}$ 利用式(6-4-22)和式(6-4-23)可得：

$$\dot{\phi} = [(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}_e)r - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_e)\dot{r}]/(\omega_e r^2\cos\phi) \qquad (6\text{-}4\text{-}49)$$

$$\dot{\lambda} = (\dot{Y}X - \dot{X}Y)\cos^2(\lambda - \lambda_e)/X^2 \qquad (6\text{-}4\text{-}50)$$

可见用球面三角的方法求纵程和横程要用到大量的三角运算。显然这套公式用在船载计算机上不合适。

②用向量法定义的纵程、横程及其变化率的计算方法

记图6-34中垂直于标准再入纵平面的单位向量为 $\boldsymbol{k}^\circ$，定义 $\boldsymbol{k}^\circ$

沿飞行方向在标准再入纵平面右侧为正

$$k^\circ = \frac{\boldsymbol{r}_f \times \boldsymbol{r}_e}{|\boldsymbol{r}_f \times \boldsymbol{r}_e|} \tag{6-4-51}$$

显然k°为单位常向量。

定义飞船计算点S的地心矢$\boldsymbol{r}$在k°方向的投影为横程Z，则

$$\left.\begin{aligned} Z &= \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}^\circ \\ \dot{Z} &= \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{k}^\circ = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}^\circ \end{aligned}\right\} \tag{6-4-52}$$

设$\boldsymbol{r}_R$为$\boldsymbol{r}$在标准再入纵平面的投影，则

$$\boldsymbol{r}_R = \boldsymbol{r} - Z\boldsymbol{k}^\circ = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}^\circ)\boldsymbol{k}^\circ \tag{6-4-53}$$

纵程和纵程变化率可用下式计算

$$R = (R_p + h_f)\delta_R = (R_p + h_f)\arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{r}_R}{r_e r_R}\right) \tag{6-4-54}$$

$$\dot{R} = (R_p + h_f)\dot{\delta}_R = (R_p + h_f)\left(\frac{-\boldsymbol{r}_e \cdot [\dot{\boldsymbol{r}}_R r_R - \boldsymbol{r}_R \dot{r}_R]}{\sin\delta_R r_e r_R^2}\right) \tag{6-4-55}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_R &= [\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}^\circ)\boldsymbol{k}^\circ] \\ \dot{r}_R &= \frac{r\dot{r} - Z\dot{Z}}{\sqrt{r^2 - Z^2}} \\ \dot{r} &= \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{r} \end{aligned}\right\} \tag{6-4-56}$$

③用求差法求$\dot{R}$、$\dot{Z}$的方法

$\dot{R}$、$\dot{Z}$用于再入制导规律，并不要求十分准确。上两方法求$\dot{R}$、$\dot{Z}$时，可用数值差分的方法计算$\dot{R}$、$\dot{Z}$.

在返回轨道计算中，记录上一时刻的纵程、横程，则

$$\left.\begin{aligned}\dot{R}(t) &= \frac{R(t)-R(t-\Delta t)}{\Delta t}\\ \dot{Z}(t) &= \frac{Z(t)-Z(t-\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}4\text{-}57)$$

Δt 为采样步长，t 为当前时刻，$t-\Delta t$ 为上一时刻。

④纵程和横程的计算公式

下面给出适用的纵程和横程计算公式。

记返回坐标系中再入点 e、标准开伞点 f、计算点 S 的地心矢为 $\boldsymbol{r}_e$、$\boldsymbol{r}_f$、$\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{r}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e + R_0 \\ z_e \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f + R_0 \\ z_f \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y + R_0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}_f \times \boldsymbol{r}_e = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_y & y_f + R_0 \\ z_f & 0 & -x_f \\ -(y_f + R_0) & x_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e + R_0 \\ z_e \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{\circ} = \begin{bmatrix} k_x^{\circ} \\ k_y^{\circ} \\ k_z^{\circ} \end{bmatrix} = \frac{1}{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (6\text{-}4\text{-}58)$$

则 R、$\dot{R}$、Z、$\dot{Z}$的计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned}Z &= \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}^{\circ} = x k_x^{\circ} + (y + R_0) k_y^{\circ} + z k_z^{\circ}\\ R &= (R_p + h_f)\arccos(a/b)\\ \dot{R} &= [R(t) - R(t - \Delta t)]/\Delta t\\ \dot{Z} &= [Z(t) - Z(t - \Delta t)]/\Delta t\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}4\text{-}59)$$

其中

$$\begin{aligned}a &= \boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{r}_R = \boldsymbol{r}_e \cdot (\boldsymbol{r} - Z\boldsymbol{k}^{\circ})\\ &= [x_e(x - Zk_x^{\circ}) + (y_e + R_0)(y + R_0 - Zk_y^{\circ})\\ &\quad + z_e[z - Zk_z^{\circ}]\end{aligned}$$

$$b = r_e[(x - Zk_x^\circ)^2 + (y + R_0 - Zk_y^\circ)^2 + (z - Zk_z^\circ)^2]^{1/2}$$

从理论上讲上述几种方法用于再入制导，均能使开伞点的位置满足精度要求。计算结果表明，算出的纵程、横程及其变化率差别不大。但从工程实现的角度，第一方法涉及过多的三角运算，这将影响船载计算机实时快速运算，不适用。第二方法计算(R、Z、$\dot{R}$、$\dot{Z}$)，计算方法严格，公式也较简单，矢量的运算可以写成标量形式的代数加、减、乘和除运算，便于船载计算机计算，再采用求差法求$\dot{R}$、$\dot{Z}$，它是较好的方法。

§6.4.5 载人飞船标准返回轨道设计

载人飞船标准返回轨道设计就是设计返回过程质心运动规律。此时飞船不受任何外干扰作用，再入段以配平攻角飞行。

1. 标准返回轨道设计的主要要求

①制动点在运行轨道上；

②开伞点误差要求；

记要求开伞点的高度、大地纬度和经度分别为($h_f^\sim$、$B_f^\sim$、$\lambda_f^\sim$)，实际开伞点的高度、大地纬度和经度分别为($h^\sim$、$B^\sim$、$\lambda^\sim$)，则开伞点的误差为：

$$\left.\begin{aligned} \Delta h_f &= h^\sim - h_f^\sim \\ \Delta B_f &= B^\sim - B_f^\sim \\ \Delta\lambda_f &= \lambda^\sim - \lambda_f^\sim \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}60)$$

有时开伞点误差用纵程偏差和横程来要求，即要求开伞点的ΔR_f、ΔZ_f小于某一数值。

③再入点当地速度倾角$\Theta = \Theta_e$，例如$\Theta_e = -1.5°$；

④再入最大过载$n_{max} \leqslant 4g$；

⑤标准返回轨道的侧向运动不过调，即不超出漏斗边界。倾侧

角反向次数不宜过多，以3～4次为好；

⑥测控系统对轨道的要求，如便于测控到舱间分离的情况；

⑦对自旋轨道航程差的要求，这里的航程差是特指自旋轨道开伞点与标准轨道开伞点航程之差，它由着陆场区的大小来确定。

2. 设计参数和设计步骤

(1)设计参数

在制动发动机推力 P 的大小和方向已定的条件下，要使返回轨道满足所有设计要求，可供调整的设计参数有：

①制动点的位置，即制动点的纬度或经度；

②制动发动机工作时间 t_p；

③再入段倾侧角 ν 的设计，包括 ν 的大小和侧向制导中漏斗边界、阻尼系数的选择，即 $\nu^{\sim}$ 的大小，C_1、C_2、C_3和 C_4的选择。

(2)设计步骤

设计标准返回轨道的基本思路如下：

第一步：选定制动点(B_0,λ_0)，用迭代方法求满足 $\Theta=\Theta_e$ 的制动发动机工作时间 t_p. 具体步骤为：

①初选制动点(B_0,λ_0)

在星下点轨迹过标准开伞点 $f^{\sim}$ 的运行轨道上(第 K 圈运行轨道)，选一制动点经度 λ_0，根据第 K 圈星下点轨迹的数据表求出与 λ_0对应的大地纬度 B_0；

②求与制动点(B_0,λ_0)相对应的制动发动机工作时间 t_p

对选取的(B_0,λ_0)，任取一 t_p 进行制动段和过渡段的仿真计算，得到相应于(B_0,λ_0,t_p)的再入点的 Θ_e.

通过迭代调整 t_p，直到满足

$$|\Theta_e-\Theta_e^{\sim}|\leqslant\varepsilon \tag{6-4-61}$$

为止，ε 为精度要求，例如取 $\varepsilon=0.001°$。

第二步：对于第一步已选定的(B_0,λ_0)，t_p 及由经验初定的倾

侧角 $\nu^{\sim}$ 的大小，侧向制导规律等，完成整个返回轨道计算，用迭代方法求出满足开伞点误差小的制动点(B_0,λ_0). 具体步骤为：

①由经验选取 $\nu^{\sim}$ 的大小变化规律和侧向制导的阻尼系数、漏斗边界；

②完成整个返回轨道计算，求出开伞点位置误差

$$\Delta_f=(\Delta B_f^2+\Delta\lambda_f^2)^{1/2} \tag{6-4-62}$$

用迭代方法修正制动点，直到满足

$$\Delta_f\leqslant\varepsilon_f$$

为止，ε_f 为精度要求。

第一步、第二步为不断重复的过程，每一次由 Δ_f 修正(B_0,λ_0)时，也要重复第一步，对 t_p 进行修正，流程示意图如图6-37.

初选(B_0,λ_0,t_p)
制动起始点
大气层外仿真
$h=100$km $|\Theta_r-\Theta_r^{\sim}|\leqslant\varepsilon$?
是
大气层内仿真
$h=10$km $\Delta f\leqslant\varepsilon_f$?
是
结束
否
修正 t_p
否
修正(B_0,λ_0)

图6-37 标准返回轨道设计流程示意图

在基本确定(B_0,λ_0,t_p)后，根据过载限制且使过载均匀化的原则再对 $\nu(t)$ 进行细调，由于考虑到自旋航程差 R_f 的要求，在初选 $\nu^{\sim}$ 的大小时，在高空段可取得较大些。

实际上，要设计出满足各项要求的标准返回轨道，可能要经过多次调试方可得到。

3. 设计结果

在三自由度标准返回轨道仿真计算中，制动段和再入段的计算步长可取0.1s，过渡段的计算步长取为1s. 由原始参数和选取的

设计参数完成整个返回轨道仿真，图6-38～图6-40为标准返回轨道的计算结果。

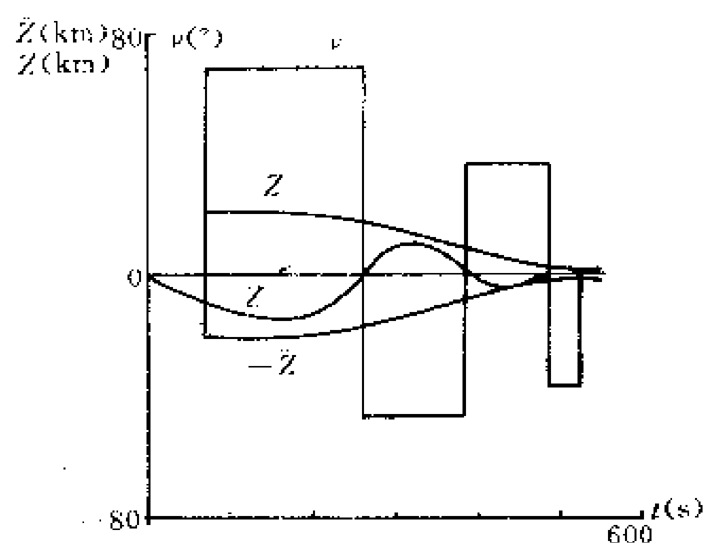


图6-38 倾侧角 ν、漏斗边界 Ż 及横程 Z 随再入时间 t 的变化

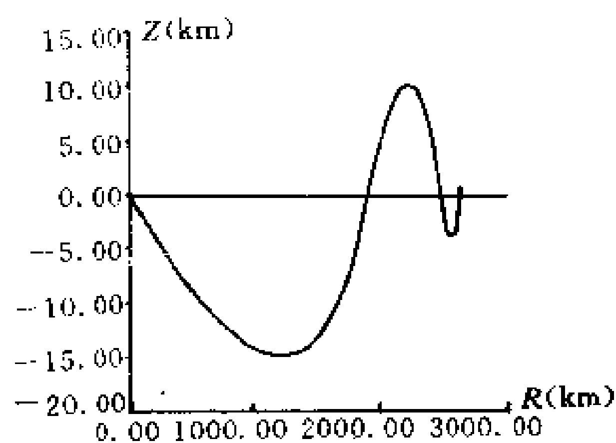


图6-39 纵程 R 和横程 Z

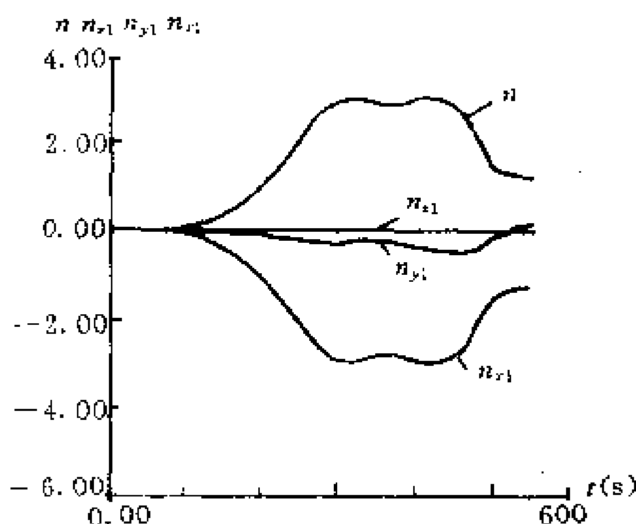


图6-40　再入总过载 n 与过载分量 n_{x1}、n_{y1}、n_{z1} 随再入时间 t 的变化

§6.5　载人飞船返回再入制导方法

§6.5.1　航天器返回再入制导控制的目的和内容

航天器在轨道上运行或再入过程受到各种力和力矩的作用。力使航天器的轨道产生摄动，力矩使航天器的姿态产生扰动。由此航天器的控制分为轨道控制和姿态控制两个方面。姿态控制是对航天器绕其质心的转动角和转动角速度的控制。轨道控制是对航天器质心位置和速度的控制。轨道控制又分为导航和制导两部分。导航的任务是确定航天器在轨道上的位置和速度。制导的任务则是按一定的制导规律控制航天器按要求的轨道运动。

控制系统在再入过程中，基本任务是使航天器脱离原来的运行轨道，建立并转入再入轨道，使再入器再入并通过大气层，安全无损降落在预定的着陆区内。

在此过程中利用大气阻力的作用，使高速运行的再入器减速，将再入器具有的动能和势能在通过大气层时转换成热能，大部分热量散发到稠密大气层中，其中的小部分使再入器表面温度急剧升高。总吸热量和热流峰值与再入器的结构形状、再入方式、返回轨道以及再入器的姿态直接有关。因此如何控制再入轨道和控制再入器姿态，使再入器的表面温度和减速过载不超过允许极限值，使再入器安全无损地降落在预定着陆区内，便是航天器返回再入制导和控制的基本任务。

返回再人制导和控制的主要内容：

①脱离运行轨道的控制

②建立再人轨道的控制（即过渡段的姿态控制）

③再入段轨道控制和姿态控制

④着陆段导航控制

着陆段导航控制不属于本书讨论的范畴，剩下的就是制动段的制导与控制，包括制动姿态的建立、发动机关机时刻的确定、再入点运动参数的确定；再入段的制导与控制，包括制导规律的确定和再入段的姿态控制。

再入式航天器分为弹道式再入航天器、弹道一升力式再入航天器和升力式再入航天器，它们再入过程的制导和控制的要求不相同。

弹道式再入航天器的控制系统只在制动和着陆两个阶段起作用，对再入段一般不进行控制，再入段的姿态是依靠再入器的气动力外形与它的质心位置所产生的稳定储备来保证的。着陆段是用减速降落伞系统来减速。由于弹道式再入航天器对再入段不进行控制，再入段受到各种干扰引起的轨道偏差无法进行轨道修正，所以弹道式再入器落点精度低。

弹道一升力式再入航天器无论在制动段、再入段和着陆段控制系统都进行工作。在再入段控制系统按再入制导规律改变滚动

角以控制升力在水平和垂直方向分量的大小，对再入段轨道实时进行修正，从而在一定程度上克服弹道式再入航天器的缺点，降低最大减速过载，提高着陆点精度。

升力式再入航天器的制导和控制系统利用高升阻比再入器的形体产生较大的升力进行控制，它在制动段、再入段和着陆段都进行控制。由于升力足够大，使着陆段轨道平缓到水平着陆，可以实现无损定点着陆。升力式再入航天器的制导和控制比弹道式和弹道—升力式再入航天器的制导和控制要复杂的多。升力式再入航天器的防热系统设计、制导和控制系统设计是升力式再入航天器必须解决的关键技术。

总之，航天器返回再入制导控制的目的是保证航天器安全无损的通过返回轨道的各个阶段，最终降到预定的着陆区。

本节首先讨论三种航天器都需要的制动段的制导问题，即制动段的关机方案问题，然后专门分析载人飞船的再入制导方法。弹道式再入航天器再入段不控制，没有制导方法问题，升力式再入航天器的再入制导方法放在后面专门讨论。

§6.5.2 载人飞船制动段关机方案

弹道式再入航天器也有制动段的关机方案问题，而且因其再入段不控制，直接影响减速过载和着陆点的精度，更有其特殊性，如制动冲量要大一些。但从关机方案的原理上讲，同弹道—升力式再入航天器——载人飞船的制动段关机方案是一样的。升力式再入航天器复杂的是再入段，制动段同载人飞船一样，所以下面以载人飞船为例讨论制动段的关机方案。

载人飞船再入大气层时的飞行状态，直接影响到再入段的制导精度。造成载人飞船再入大气层时的飞行状态参数与标准飞行状态参数偏差的因素很多，诸如制动点飞行状态初始偏差、初始质量偏差、发动机推力偏差、制动角偏差等因素，而其中影响较大的

主要因素是制动发动机的工作状态。制动发动机的主要参数有推力的大小、方向和工作时间，推力大小由总体部门选定，推力方向由航程最小也可以选定，标准返回轨道设计确定了标准情况下发动机工作时间。而当存在着偏差时，只有通过调整发动机工作时间来消除各种干扰因素的影响。发动机工作时间的确定取决于发动机的关机方案，下面介绍几种关机方案。

1. 按时间关机方案

把设计标准返回轨道得到的标准关机时间 t_{kn} 作为制动发动机的关机时间，当当前时刻等于标准关机时间的时候，制动发动机停止工作。即

$$\Delta t_k = t - t_{kn} = 0 \tag{6-5-1}$$

时，制动发动机关机。此时发动机推力大小偏差影响较大，由于推力大小存在偏差，因此在标准关机时刻，载人飞船速度不能达到或者大于标准的关机速度，从而引起再入点的飞行速度偏差，导致载人飞船着陆点位置偏差较大。它的优点在于当导航系统不能正常工作时，仍能确定关机时刻，因此可作为备选的关机方案。

2. 按增益速度关机方案

设标准关机点的增益速度为 $v_{gn}(t_{kn})$，$\boldsymbol{v}_n(t_0)$ 为标准制动点速度矢，$\boldsymbol{v}_n(t_{kn})$ 为标准关机点速度矢，令

$$v_{gn}(t_{kn}) = |\boldsymbol{v}_n(t_{kn}) - \boldsymbol{v}_n(t_0)| \tag{6-5-2}$$

在实际制动段飞行过程的某一时刻，载人飞船的速度矢为 $\boldsymbol{v}$，则载人飞船的实际增益速度为 $v_g(t)$

$$v_g(t) = |\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_n(t_0)| \tag{6-5-3}$$

当

$$\Delta v_{gk} = v_g(t) - v_{gn}(t_{kn}) = 0 \tag{6-5-4}$$

时，制动发动机停止工作。

由于考虑按增益速度的大小来控制制动发动机工作时间，因

而推力大小和方向等偏差的影响，远小于按标准时间关机方案。载人飞船采用此方案时，载人飞船再入大气层时飞行状态偏差较小，因而着陆点的精度也高于按时间关机方案。

此关机方案简单易行，在运算量小的情况下考虑了实际轨道与标准轨道间的偏差。在航天器返回中是常用的方法。

3. 按再入速度角关机方案

下面讨论另一种关机方案，选择反映制动发动机关机点飞行状态参数变化的再入点速度倾角 Θ_e 作为制动发动机关机特征的关机方案。

根据弹道学原理，易知载人飞船再入点速度倾角 Θ_e 可表示为载人飞船制动段结束点，即发动机关机点飞行状态的函数。

$$\Theta_e = \Theta_e(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{r}_k) \tag{6-5-5}$$

式中 Θ_e 为再入点当地速度倾角，$\boldsymbol{v}_k$、$\boldsymbol{r}_k$ 分别为制动发动机关机点的速度矢和地心矢。

在一阶摄动条件下，再入点当地速度倾角偏差 $\Delta\Theta_e$ 可表示为：

$$\Delta\Theta_e = \frac{\partial\Theta_e}{\partial\boldsymbol{v}_k}\cdot\Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{\partial\Theta_e}{\partial\boldsymbol{r}_k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_k \tag{6-5-6}$$

或

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_e = &\frac{\partial\Theta_e}{\partial v_{xk}}\Delta v_{xk} + \frac{\partial\Theta_e}{\partial v_{yk}}\Delta v_{yk} + \frac{\partial\Theta_e}{\partial v_{zk}}\Delta v_{zk} \\ &+ \frac{\partial\Theta_e}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial\Theta_e}{\partial y_k}\Delta y_k + \frac{\partial\Theta_e}{\partial z_k}\Delta z_k\end{aligned} \tag{6-5-7}$$

其中$\frac{\partial\Theta_e}{\partial\boldsymbol{v}_k}$、$\frac{\partial\Theta_e}{\partial\boldsymbol{r}_k}$为再入点当地速度倾角 Θ_e 关于制动段发动机关机点 K 的飞行状态参数的偏导数，它反映了制动段关机点 K 的飞行状态参数的变化与再入点 e 的速度倾角变化间的关系，这些参数可在地面上利用计算误差轨道与标准轨道，用求差法得到。通过仿真计算可以发现，制动段关机点的速度偏差($\Delta v_{xk}, \Delta v_{yk}, \Delta v_{zk}$)和位置偏差($\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$)引起的再入角偏差基本上是线性的，其中 x 和

v_x 的偏差对再入点速度倾角的影响较大

$\Delta v_k, \Delta r_k$ 分别为载人飞船返回制动段实际飞行状态参数与其标准返回轨道关机点的飞行状态参数的偏差

$$\left.\begin{aligned}\Delta v_k &= v_k - v_{kn} \\ \Delta r_k &= r_k - r_{kn}\end{aligned}\right\} \tag{6-5-8}$$

将式(6-5-8)代入式(6-5-6)，令 $\Delta\Theta_e = 0$，即可得到载人飞船制动段的关机方程：

$$J(t) = J_n(t_{kn}) \tag{6-5-9}$$

式中

$$J_n(t_{kn}) = \frac{\partial\Theta_e}{\partial v_k}v_{kn} + \frac{\partial\Theta_e}{\partial r_k}r_{kn} \tag{6-5-10}$$

为标准关机特征量，可在地面利用标准轨道参数求出，并预先在船上装订。

$$J(t) = \frac{\partial\Theta_e}{\partial v_k}v(t) + \frac{\partial\Theta_e}{\partial r_k}r(t) \tag{6-5-11}$$

为实际关机特征量，在船上可实时计算。

当 $J(t) = J_n(t_{kn})$ 时，关闭制动发动机，载人飞船进入过渡段飞行。

仿真分析表明，该关机方案能良好地满足再入点对运动参数的要求。

§6.5.3 无再入制导时开伞点位置误差分析和机动能力

1. 返回再入过程中误差源及其分析

据文献[2]介绍，影响再入器制导和控制系统设计的主要因素如下：

约束条件方面：

①再入器加热的限度；

②航天员或仪器的减速过载的限制；

③预定落区的位置和落点精度的限制。

偏差和干扰方面：

①再入器气动力特性如升阻比(L/D)的不确定性；

②再入器的质量特性及其变化：质量、质心变化，转动惯量及惯量矩变化、结构的振型和频率等；

③发动机推力变化和推力偏心；

④再入器内外部各种扰动力矩，主要有气动扰动力矩、质量排出力矩、陀螺进动力矩及电磁干扰力矩等；

⑤挠性体动力学对控制的影响；

⑥推进剂晃动的影响；

⑦初始条件变化；

⑧再入点位置、再入角和再入角速度误差；

⑨传输滞后和有限字长对系统的影响；

⑩轨道和姿态敏感器测量和安装误差；

⑪地球的大气特性。

研究结果表明[2]，再入器质量特性的不确切性，特别是升阻比(L/D)的不确定性直接影响制导导航控制系统的品质。大气密度的不确定性、制动发动机点火控制误差、陀螺和加速度计的漂移以及开始进入大气层时初始位置和初始速度误差都会使制导和控制产生误差。

上述约束条件通过标准返回轨道设计和再入制导方法的选择，再通过大量仿真计算看其是否满足要求。挠性体动力学对控制的影响、推进剂晃动的影响属于更专门的课题，本书不研究。其余的偏差本书将予以考虑，下面给出各种误差源的计算方法。

(1)制动点位置误差

在返回坐标系中，设制动点位置误差

$$\Delta\rho(t_0) = \begin{bmatrix} \Delta x(t_0) \\ \Delta y(t_0) \\ \Delta z(t_0) \end{bmatrix} \tag{6-5-12}$$

于是式(6-4-10)的初始位置矢 $\rho(t_0)$ 为：

$$\rho(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 - R_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x(t_0) \\ \Delta y(t_0) \\ \Delta z(t_0) \end{bmatrix} \tag{6-5-13}$$

$\Delta x(t_0)$、$\Delta y(t_0)$、$\Delta z(t_0)$ 的取值范围一般为：$-1000\text{m} \sim 1000\text{m}$

(2)制动点速度误差

在返回坐标系中，载人飞船相对地球运动的飞行速度误差：

$$\Delta v(t_0) = \begin{bmatrix} \Delta v_x(t_0) \\ \Delta v_y(t_0) \\ \Delta v_z(t_0) \end{bmatrix} \tag{6-5-14}$$

于是式(6-4-9)的初始速度矢 $v(t_0)$ 为：

$$v(t_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu/r_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_e r_0 \cos\phi_0 \sin A_0 \\ 0 \\ \omega_e r_0 \cos\phi_0 \cos A_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta v_x(t_0) \\ \Delta v_y(t_0) \\ \Delta v_z(t_0) \end{bmatrix} \tag{6-5-15}$$

$\Delta v_x(t_0)$、$\Delta v_y(t_0)$、$\Delta v_z(t_0)$ 的取值范围为：$-0.5\text{m/s} \sim 0.5\text{m/s}$.

(3)制动点飞行方向误差

制动点轨道运行速度(即该点绝对飞行速度)方向与返回坐标系的关系如图6-41所示，$\Delta\theta_v$、$\Delta\sigma_v$ 为飞行方向角误差。

于是运动方程中，式(6-4-9)的初始速度 $v(t_0)$ 为：

$$v(t_0) = \begin{bmatrix} v^A(t_0)\cos\Delta\theta_v\cos\Delta\sigma_v \\ v^A(t_0)\sin\Delta\theta_v \\ -v^A(t_0)\cos\Delta\theta_v\sin\Delta\sigma_v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_e r_0 \cos\phi_0 \sin A_0 \\ 0 \\ \omega_e r_0 \cos\phi_0 \cos A_0 \end{bmatrix} \tag{6-5-16}$$

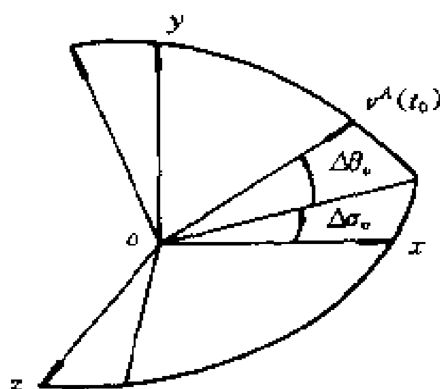


图6-41 制动点飞行方向误差 $\Delta\theta_v$、$\Delta\sigma_v$

其中：$v^A(t_0)=\sqrt{\mu/r_0}$为飞船制动时刻绝对速度

$\Delta\sigma_v$ 的取值范围：$-0.1°\sim0.1°$

$\Delta\theta_v$ 的取值范围：$-0.015°\sim0.015°$

这里说明一下，式(6-5-15)和式(6-5-16)对速度方向误差，有些重复，式(6-5-15)主要是速度大小的误差。

(4)制动姿态角误差

制动发动机推力方向有误差，设姿态误差角为 $\Delta\varphi_p$、$\Delta\psi_p$，此时运动方程中推力矢 $\boldsymbol{P}$ 在返回坐标系中的三分量，即式(6-4-13)要改成为：

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_A \begin{bmatrix} P\cos(\varphi_p + \Delta\varphi_p)\cos(\psi_p + \Delta\psi_p) \\ P\sin(\varphi_p + \Delta\varphi_p)\cos(\psi_p + \Delta\psi_p) \\ -P\sin(\psi_p + \Delta\psi_p) \end{bmatrix} \quad (6\text{-}5\text{-}17)$$

$\Delta\varphi_p$、$\Delta\psi_p$ 的取值范围为：$-1.5°\sim1.5°$

(5)制动时初始质量误差

设制动时刻质量相对误差为 $\Delta m_0/m_0$，此时在制动段质量计算公式为：

$$m = m_0(1 + \Delta m_0/m_0) - \dot{m}T \quad (6\text{-}5\text{-}18)$$

$\Delta m_0/m_0$取值范围通常为：1%.

(6)发动机推力值误差

设制动发动机推力大小总误差为ΔP,则在式(6-4-9)中,推力大小为

$$P = P^{\sim} + \Delta P \qquad (6\text{-}5\text{-}19)$$

$P^{\sim}$为标准条件下的推力值,ΔP的取值范围一般为:$-200N \sim 200N$.

(7)制动发动机推力偏斜ΔA_p

标准情况下,推力矢$\boldsymbol{P}$沿船体纵轴o_1x_1方向,但实际上$\boldsymbol{P}$可能偏离o_1x_1轴。在Ⅰ、Ⅲ象限二台制动发动机同时工作时,由于推力偏斜,使$\boldsymbol{P}$在船体坐标系中的三分量(P_{x1}, P_{y1}, P_{z1})为:

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\cos\Delta A_p \\ P\sin\Delta A_p \sin 45° \\ P\sin\Delta A_p \cos 45° \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}5\text{-}20)$$

其示意图如图6-42.

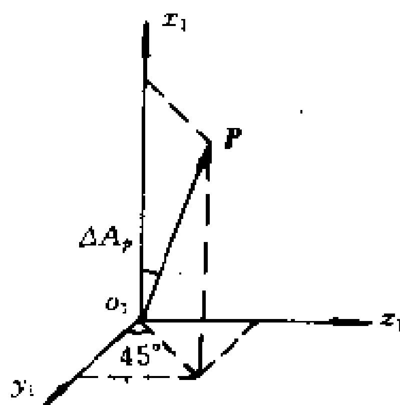


图6-42 推力偏斜ΔA_p示意图

假设在制动段,载人飞船姿态在惯性空间保持稳定,则有

$$\begin{pmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ P_{zA} \end{pmatrix} = A_B(\varphi_p, \psi_p, \gamma_p = 0) \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}5\text{-}21)$$

其中：A_B 的表达式同 O_B 的表达式是一样的，见式(2-2-31)，只要用 φ_p、ψ_t、$\gamma_p=0$分别代替 φ、ψ、γ 即可。

ΔA_p 的取值范围一般为$-0.5°\sim0.5°$.

(8)气动系数误差

气动系数误差有：阻力系数相对误差 $\Delta C_D/C_D^{\sim}$ 和升力系数相对误差 $\Delta C_L/C_L^{\sim}$，此时阻力系数和升力系数为

$$\left.\begin{aligned} C_D &= C_D^{\sim}(1 - \Delta C_D/C_D^{\sim}) \\ C_L &= C_L^{\sim}(1 + \Delta C_L/C_L^{\sim}) \end{aligned}\right\} \tag{6-5-22}$$

$C_L^{\sim}$，$C_D^{\sim}$ 为升力系数、阻力系数的标准值，$\Delta C_D/C_D^{\sim}$、$\Delta C_L/C_L^{\sim}$ 的取值范围为$-20\%\sim20\%$.

(9)升力控制指令延迟 $\Delta\tau$ 和倾侧角 ν 的误差 $\Delta\nu$

升力控制指令延迟是指倾侧角 ν 并不能立刻反向，应有延迟时间，倾侧角大小的量测也存在着误差，倾侧角大小的误差取值范围在$-1.5°\sim1.5°$之间。而倾侧角 ν 反向延迟时间严格的作法是在六自由度弹道仿真通过滚动方程计算得到，而且反向时角度的大小也不一样。在三自由度弹道仿真，为了估计其影响，可认为在6s内完成反号动作，且假定角度是均匀变化的。

(10)大气密度误差

记大气密度相对误差为 $\Delta\rho/\rho^{\sim}$，则实际大气密度

$$\rho = \rho^{\sim}(1 + \Delta\rho/\rho^{\sim}) \tag{6-5-23}$$

$\Delta\rho/\rho^{\sim}$的取值为 $\Delta\rho/\rho^{\sim}\sim h$ 曲线，详见军标GJB366.1—87.

(11)风干扰

设风矢量为 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{W}$ 在当地水平面内垂直地心矢 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{W}$ 可用风速大小 V_W 和风向角 A_W 来描述，A_W 是指来风 $\boldsymbol{W}$ 与当地正北方向的夹角，顺时针方向度量为正。于是飞船相对于大气的运动速度 $\boldsymbol{U}$ 可表示为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{W} \tag{6-5-24}$$

如图6-43所示，从图6-43看出：由于风干扰的存在，不仅使飞

船相对于大气的运动速度大小发生变化，也使其方向发生变化。

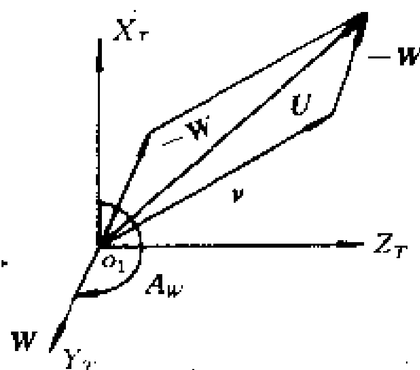


图6-43 U、W、v 关系图

严格地说，考虑风干扰对飞船运动的影响，不仅要考虑 U 大小变化引起的飞行马赫数 M 和动压 q 的变化，也要考虑由于 U 方向与 v 方向的偏差引起的附加攻角 $\Delta\alpha$，附加侧滑角 $\Delta\beta$. 这个工作只有进行六自由度弹道仿真才能进行，这将在后面讨论。由于三自由度弹道计算的局限性，只能在某些假设条件下来考虑风干扰对飞船运动的影响，其结果也具有一定的参考价值。

假设在风干扰下，载人飞船仍以配平攻角飞行，即认为飞船姿态控制系统能保证飞船的姿态实时跟踪上速度 U 方向的变化，以配平状态飞行。

此时，风干扰引起飞行马赫数 M 和动压 q 的变化

$$\left.\begin{aligned} M &= U/a \\ q &= \frac{1}{2}\rho U^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-5-25}$$

其中 a 为声速，ρ 为大气密度。

关于 U 的计算如下：如图6-43所示。

W 在地理坐标系中的三分量（W_{xT}，W_{yT}，W_{zT}）为：

$$\begin{bmatrix} W_{xT} \\ W_{yT} \\ W_{zT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_W\cos A_W \\ 0 \\ V_W\sin A_W \end{bmatrix} \tag{6-5-26}$$

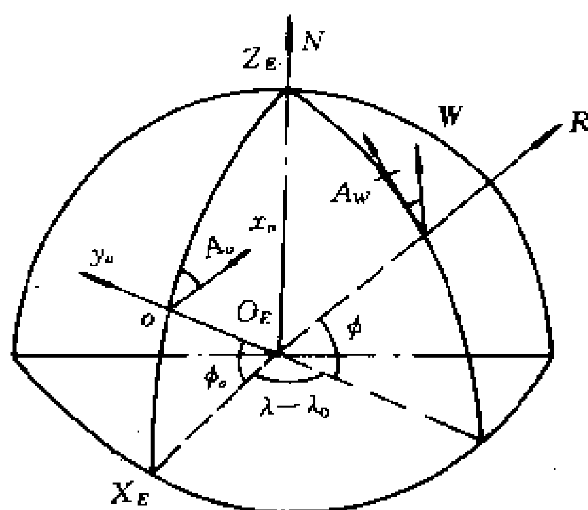


图6-44 风 $\boldsymbol{W}$ 计算图

W 在当地地心坐标系 O_E-XYZ 中的三分量(W_{XE}, W_{YE}, W_{ZE})为:

$$\begin{bmatrix} W_{XE} \\ W_{YE} \\ W_{ZE} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_T \begin{bmatrix} V_W \cos A_W \\ 0 \\ V_W \sin A_W \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}5\text{-}27)$$

其中 $\boldsymbol{E}_T$ 为地理坐标系与当地地心坐标系的转换阵

$$\boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{E}_O(A_0 = 0, \phi_0 = \phi)$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}5\text{-}28)$$

ϕ 为当地地心纬度。

于是 $\boldsymbol{W}$ 在返回坐标系中的三分量(W_x, W_y, W_z)

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_E \boldsymbol{M}_E[-(\lambda - \lambda_0)] \boldsymbol{E}_T \begin{bmatrix} V_W \cos A_W \\ 0 \\ V_W \sin A_W \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}5\text{-}29)$$

其中

$$M_E[-(\lambda-\lambda_0)]=\begin{bmatrix}\cos(\lambda-\lambda_0) & -\sin(\lambda-\lambda_0) & 0\\ \sin(\lambda-\lambda_0) & \cos(\lambda-\lambda_0) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6-5-30}$$

$$E_O=\begin{bmatrix}-\sin\phi_0\cos A_0 & \cos\phi_0 & \sin\phi_0\sin A_0\\ \sin A_0 & 0 & \cos A_0\\ \cos A_0\cos\phi_0 & \sin\phi_0 & -\cos\phi_0\sin A_0\end{bmatrix} \tag{6-5-31}$$

λ是经度，λ_0是制动时刻的经度。

于是$\boldsymbol{U}$在返回坐标系中的三分量(U_x、U_y、U_z)为

$$\begin{bmatrix}U_x\\U_y\\U_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{bmatrix} \tag{6-5-32}$$

由于$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{v}$的方向不同，使得有风时的速度倾角和航迹偏航角变化

$$\left.\begin{aligned}\theta_W&=\mathrm{arctg}(U_y/U_x)\\ \sigma_W&=\arcsin(-U_z/(U_x^2+U_y^2+U_z^2)^{1/2})\end{aligned}\right\} \tag{6-5-33}$$

此时半速度坐标系与返回坐标系的关系应用θ_W、σ_W表示，它对气动力在返回坐标系的投影是有影响的。

风速V_W、风向角A_W均随季节、高度、地理位置的不同而不同。仿真时应取模拟风场进行分析。

还有一些误差，如转动惯量的误差、质心位置偏差，在三自由度轨道仿真时不能进行分析，需用六自由度轨道仿真分析其影响，此外惯性器件如陀螺和加速度表的误差，三自由度轨道仿真也不便于分析，也放在六自由度轨道仿真中进行。

2. 无再入制导时开伞点位置误差分析

无再入制导时开伞点位置误差分析是指制动段采用关机方程

消除干扰因素造成再入点的偏差，但再入段不进行制导，$\nu(t)$仍按标准返回轨道设计的规律变化。这种计算的目的是研究无再入制导会造成多大的偏差，再与机动能力进行比较，判断其是否可控。

采取的方法是最大偏差法。求各项干扰引起开伞处位置误差时，各项干扰依顺序取值，其它干扰为零，且干扰量取正、负最大值两种情况，得到干扰作用下开伞处的位置，与标准开伞点位置进行比较，便得到有各项干扰作用时，返回舱在开伞点高度上的位置偏差。

计算结果如表6.4，计算时考虑了10项干扰，即制动点位置误差、制动点速度误差、制动点飞行方向误差，制动初始质量误差、发动机推力值误差、发动机推力偏斜、气动力系数误差、大气密度误差、风干扰。考虑了升力控制指令延迟和倾侧角大小误差。表6.4还列出了自旋轨道的位置偏差。计算自旋轨道时，假设$\nu(t)=\omega_s t$，ω_s为自转角速度，计算时取$\omega_s=12°/s$。

表6.4　无再入制导时开伞点处位置偏差

误差源				10km处位置误差	
序号 I	项目	符号,序号 i	量值	$\triangle R$(km)	$\triangle Z$(km)
1	制动点位置误差	$\triangle x$　1	1000m	31.629	0.593
			−1000m	−31.455	−0.326
		$\triangle y$　2	1000m	30.993	0.498
			−1000m	−29.646	−0.226
		$\triangle z$　3	1000m	−1.304	−0.462
			−1000m	1.629	0.716
2	制动点速度误差	$\triangle v_x$　4	0.5m/s	3.405	0.124
			−0.5 m/s	−2.624	0.130
		$\triangle v_y$　5	0.5m/s	13.732	0.317
			−0.5 m/s	−13.447	−0.061
		$\triangle v_z$　6	0.5m/s	0.165	0.451
			−0.5 m/s	0.155	−0.201

误差源				10km处位置误差	
序号 I	项目	符号,序号 i	量值	ΔR(km)	ΔZ(km)
3	制动点飞行方向误差	ΔA_z 7	0.1°	2.099	−8.631
			−0.1°	0.996	8.896
		$\Delta\theta_v$ 8	0.015°	54.798	0.914
			−0.015°	−54.952	−0.613
4	制动姿态角误差	$\Delta\varphi_p$ 9	1.5°	−65.101	−0.829
			−1.5°	65.643	1.151
		$\Delta\psi_p$ 10	1.5°	0.686	−1.766
			−1.5°	0.524	2.022
5	制动初始质量误差	$\Delta m_c/m_0$ 11	1%	12.852	0.202
6	发动机总推力误差	ΔP 12	2000N	−30.295	−0.070
			−200N	65.222	0.544
7	发动机总推力方向偏斜	ΔA_p 13	0.5°	−15.247	0.343
			−0.5°	15.635	−0.083
8	气动系数误差	$\Delta C_D/\bar{C}_D$ 14	20%	−185.934	−2.006
			−20%	308.552	10.023
		$\Delta C_L/\bar{C}_L$ 15	20%	159.254	11.064
			−20%	−135.876	−6.246
9	升力控制指令延迟倾斜角误差	$\Delta\tau$ 16	6s	8.961	3.143
		$\Delta\nu$ 17	1.5°	−31.639	−2.155
			−1.5°	32.001	2.498
10	大气密度误差	$\Delta\rho/\bar{\rho}$ 18		−117.575	5.477
11	风	V_W、A_W 19		−14.866	−3.299
12	自旋轨道		12°/s	−462.875	−13.789

由表6.4统计出位置误差的最大偏差量

正纵程误差 $\Delta R=\left(\sum_{i=1}^{19}+\Delta R_i^2\right)^{1/2}=369\text{km}$

负纵程误差 $\Delta R=-\left(\sum_{i=1}^{19}\Delta R_i^2\right)^{1/2}=-281\text{km}$

正横程误差 $\Delta Z=\left(\sum_{i=1}^{19}+\Delta Z_i^2\right)^{1/2}=19\text{km}$

负横程误差 $\Delta Z=-\left(\sum_{i=1}^{19}\Delta Z_i^2\right)^{1/2}=-12\text{km}$

也可以不按纵程、横程的正负进行统计，取每一项干扰造成开伞处偏差最大值(绝对值)进行统计，即

纵程最大偏差 $\Delta R_{max}=\left[\sum_{i=1}^{19}(\Delta R_{imax})^2\right]^{1/2}$

横程最大偏差 $\Delta Z_{max}=\left[\sum_{i=1}^{19}(\Delta Z_{imax})^2\right]^{1/2}$

3. 机动能力

计算载人飞船的机动能力，可取倾侧角 ν 恒为某一常数，算出 $n_{gmax}<4g$ 时的最大纵程和横程，即可得到机动能力。前面的表6.2和表6.3就是机动能力计算，图6-29和图6-30就是表示机动能力的舌形区，若取舌形区中心为标准返回轨道的开伞点，则其纵程正负方向能力差不多，表6.2的例子，其纵程差约为±800km，横程约为±230km. 实际上当倾侧角 $|\nu|$ 高空段较大，低空段较小时，标准开伞点在舌形区根部，此时纵程负向机动能力不大，如图6-45所示，造成这一现象的主要原因是标准返回轨道要满足与自旋轨道的航程差小于某一规定值造成的。

图6-45所示的机动能力

纵向－78.9km～801.3km

横向－133.4km～177.7km

当飞船的星下点轨迹在呈舌形的机动区域内，表示通过控制可能将飞船的开伞点控制到标准开伞点，反之，若星下点轨迹不通

过舌形机动区域，则无能力纠正横程的初始偏差，这是不允许的。

是否能控制飞船到标准开伞点，可将表6.4得到的正负纵程、横程偏差最大值与机动能力进行比较，横程机动能力足够；正纵程误差 $\Delta R=369$km，而负的纵程机动能力仅为79km，相差较远；负纵程误差 $\Delta R=281$km，而正的纵程机动能力为801km，富裕量较大。其原因是标准返回轨道设计的开伞点不在舌形区中央造成的。

上面的分析取的是极端情况，实际开伞点的位置偏差，要通过有再入制导的轨道仿真才能进行分析。

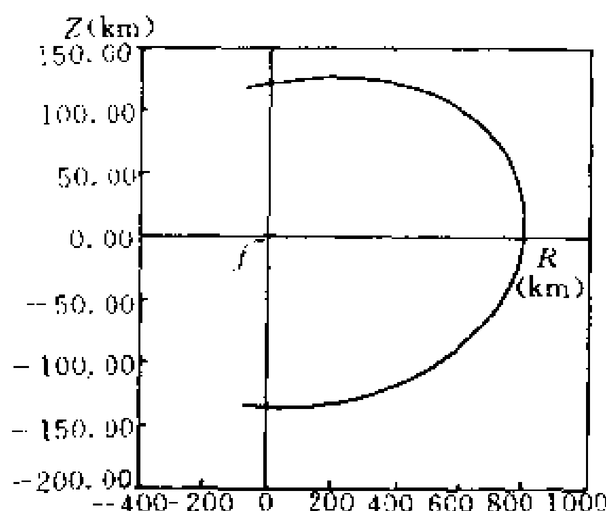


图6-45 机动舌形区

§6.5.4 再入制导方法

1. 再入制导方法的分类

制导的任务是按一定的制导规律控制航天器按要求的轨道运动。再入制导的目的是控制再入器在着陆点（开伞点，下同）附近着陆，并使再入段中的过载和热环境满足要求。对载人飞船来讲，确定再入段运动轨迹唯一能改变的控制变量是倾侧角 ν. 根据确定

倾侧角 ν 的大小和符号的方法不同，载人飞船的再入制导方法可分为两类：

一类是利用预测能力对落点航程进行预测的制导方法称预测落点法，简称预测制导法；另一类是利用标准轨道的制导方法称标准轨道法。

标准轨道法是在飞船的计算机中预先装订标准再入轨道参数，它们既可以是时间 t 的函数，也可以是速度的函数，甚至是参数组合 $u=v\cos\Theta/\sqrt{gr}$ 的函数。当飞船再入大气层后，由于受初始条件误差、大气密度的变化、气动系数变化等因素的影响，实际轨道偏离了标准轨道，此时导航系统测出飞船的姿态参数和速度增量，由计算机计算得到飞船的位置和速度等轨道参数，将实测轨道参数与标准轨道参数进行比较，得到误差信号，将误差信号输入到制导方程得出飞船需要的倾侧角 ν，再换算成滚动角 γ，将需要的滚动角及滚动角速度向姿态控制系统发出控制指令，调整飞船的滚动角，从而改变倾侧角 ν，即改变升力的方向，实现飞船的再入轨道控制。

预测落点法是在飞船计算机内存贮对应理论落点的特征参数，根据导航系统测量的飞船的状态参数，实时进行落点计算并将计算的结果与理论落点进行比较，形成误差控制信号输入到计算机制导方程中，按照规定的制导规律控制飞船的滚动角和倾侧角，改变升力的方向，以实现对飞船着陆点的控制。

预测落点法与标准轨道法相比较：前者着眼于每时每刻实际轨道对应的落点与理论设计落点的误差。并根据这一误差值和过载、加热量的限制产生控制指令，对飞船再入轨道实现制导控制。预测落点法可以达到比标准轨道法更高的落点精度，并且对再入时的初始条件误差不敏感。但是预测落点法要求飞船计算机有较快的计算速度和比较大的存贮容量，而且控制方案比较复杂。标准轨道法着眼于实测轨道与标准轨道参数的比较，实时形成误差，以

该误差信号为输入，实现飞船的再入轨道控制，达到控制着陆点的目的。标准轨道法的优点是：控制律简单，容易实现，对计算机的速度和容量要求都可以适当降低。这种方法的缺点是：落点控制精度较低，落点控制精度受再入初始条件误差以及再入过程气动系数偏差的影响较大。

预测制导是一个有发展潜力的制导方法，将放在后面专门讨论，下面讨论标准轨道法制导。

2. 利用标准轨道的制导方法

利用标准轨道的制导方法是事先将标准再入轨道的状态变量计算出来，存贮在飞船的计算机中，然后与导航系统测得的飞船的状态变量加以比较，将状态变量的增量用于制导控制系统，控制飞船尽量靠近标准再入轨道达到着陆点。

采用这种制导方法必须选取一条标准返回再入轨道，标准返回再入轨道应满足对过载、热流的限制。

有标准轨道的制导方法，要求存贮状态变量为给定自变量的函数，在某些情况下也存贮反馈增益系数。自变量可以是时间或是速度，也可以是一个状态变量或是一组状态变量。

有标准轨道的再入制导的目的是使运动参数接近标准再入轨道参数，使其着陆点满足要求。利用标准轨道的再入制导在实现中分成纵向制导和侧向制导，且以纵向制导为主。

因为总升力在半速度坐标系上投影，利用式(6-4-5)可表示为：

$$\boldsymbol{L} = L\cos\nu \boldsymbol{y}_h^0 + L\sin\nu \boldsymbol{z}_h^0 \qquad (6\text{-}5\text{-}34)$$

式中 $\boldsymbol{L}$——总升力；

L——总升力大小；

ν——倾侧角；

$\boldsymbol{y}_h^0$、$\boldsymbol{z}_h^0$——半速度坐标系 y_h、z_h 方向的单位向量。

$L\cos\nu$ 是总升力在纵向的投影，它的大小直接影响到飞船升降快慢。$L\sin\nu$ 是总升力在侧向的投影，它影响飞船的横向运动和横程。

载人飞船受到的热负荷、过载，主要取决于飞船的下降速度，而下降速度又主要取决于升力的纵向投影 $L\cos\nu$，$L\cos\nu$ 的大小取决于攻角 α 和倾侧角 ν，配平攻角不可调，所以控制 $L\cos\nu$ 的大小仅有控制变量 ν. 纵向制导决定 ν 的大小，而符号由侧向制导确定。

(1)纵向制导

设标准返回轨道纵向升阻比为 $(L/D)_0$，实际升阻比为 (L/D)，余量系数为 K，则倾侧角 ν_0 为：

$$\cos\nu_0 = \frac{(L/D)_0}{L/D} = \frac{(L/D)K}{L/D} = K \qquad (6\text{-}5\text{-}35)$$

由于有干扰，使实际的状态参数不同于标准轨道的状态参数，应使倾侧角改变大小，使实际轨道接近标准再入轨道，设有误差时实际纵向控制升阻比为 $(L/D)_c$. 则此时的倾侧角为：

$$\cos\nu = \frac{(L/D)_c}{(L/D)} \qquad (6\text{-}5\text{-}36)$$

令

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + \Delta(L/D) \qquad (6\text{-}5\text{-}37)$$

则如何确定升阻比增量 $\Delta(L/D)$ 是纵向制导的关键。

因为再入制导的目的是使纵程差减小，在开伞点满足精度要求。为此可令

$$\Delta(L/D) = K_3\Delta R \qquad (6\text{-}5\text{-}38)$$

且 $K_3<0$，因为当 $\Delta R>0$ 时，表示飞船实际的纵程比标准轨道的纵程大，应该使飞船下降快一些，为此应减小升阻比，使 ν 角加大。

但实际上，采用式(6-5-38)进行制导，制导过渡过程不好。为了保证纵向制导过渡过程良好，最终的纵程偏差 ΔR 较小，通常采用确定纵向控制升阻比的形式有如下几种

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + K_1\Delta n_x + K_2\Delta\dot{h} + K_3\Delta R\Big|_{t,\bar{u}} \qquad (6\text{-}5\text{-}39)$$

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + K_1\Delta h + K_2\Delta\dot{h} + K_3\Delta R + K_4\Delta\dot{R}\Big|_t \tag{6-5-40}$$

$$(L/D)_c = (L/D)_0 - K_1\Delta n_x + K_2\Delta\dot{h} + K_3\Delta R + K_4\Delta\dot{R}\Big|_{t,v,\bar{v}} \tag{6-5-41}$$

式中 h、n_x、R 分别为飞行高度、过载和纵程，$\dot{h}$ 为高度变化率，$\dot{R}$为纵程变化率，Δh、$\Delta\dot{h}$、Δn_x、ΔR、$\Delta\dot{R}$为其增量。

从式(6-5-41)不难看，所谓制导规律设计就是如何确定参数 K_1、K_2、K_3和 K_4. 称 K_i 为反馈增益系数。

目前确定反馈增益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4的方法主要有以下几种：

①试验法

取 K_1、K_2、K_3、K_4为常数，或 K_3分段为常数，然后对初始误差及其它误差进行仿真计算，通过试验确定满足落点精度要求的 K_1、K_2、K_3和 K_4. 显然该方法理论分析不够且与经验有关。

②固化系数法

将再入器制导系统简化成二阶或三阶系统，再采用固化系数法将系统看成常系数系统。对常系数系统用古典方法求解反馈增益系数 K_i. 例如航天飞机的再入制导就采用了类似的方法，具体的研究将在后面讨论。

③性能指标最优化法

用最佳二次型性能指标选择最佳的反馈增益系数，国内外有这方面的论文。将在下一节详细讨论。

(2)侧向制导

因为存在着各种干扰因素，实际轨道不可能与标准轨道一致，需要改变升阻比$(L/D)_c$，所以实际的倾侧角 ν 总不等于标准返回轨道的 ν_0，而 ν 的大小由式(6-5-36)确定，即纵向制导方程决定

$$\cos\nu = \frac{(L/D)_c}{(L/D)} = \frac{(L/D)K + \Delta(L/D)}{(L/D)} \tag{6-5-42}$$

式中制导规律所要求的纵向升阻比增量由下式决定。为提高着陆点的精度和制导过程良好，下面均以式(6-5-41)为准进行讨论。

$$\Delta(L/D) = K_1\Delta n_x + K_2\Delta\dot{h} + K_3\Delta R + K_4\Delta\dot{R} \tag{6-5-43}$$

其中 Δn_x、$\Delta\dot{h}$、ΔR、$\Delta\dot{R}$分别为飞船的切向过载、爬高率、纵程和纵程变化率实际值与标准值的差。K_1、K_2、K_3和 K_4为纵向制导规律的反馈增益系数。

由式(6-5-42)知，当有误差时，其倾侧角 ν 同标准返回轨道的 ν_0不一样。纵向制导方程决定了 ν 的大小，它满足了纵向制导的要求。此时，总升力 L 的侧向分量$(L/D)D\sin\nu$ 也就确定了，不能调整。但侧力 $L\sin\nu$ 的符号还可以改变。由于 ν 反号时，它不影响$(L/D)_c$ 的大小和符号，也不影响侧力的大小，但可以改变其方向。利用这个特点可以在侧向制导设计中设计一个区间，使载人飞船在此区间内自由飞行，当碰到边界时，让 ν 反号，使侧向运动向相反方向进行，因此侧向制导实现的是开关控制。因为最终横程要小于某一值，而开始偏差可能很大，也允许大一些，为此将边界设计成漏斗式的边界。该边界值为 $\bar{Z}$，当横程超过边界时，ν 就反号，实现开关控制，则侧向制导方程为：

$$\nu(t) = \begin{cases} -|\nu|\mathrm{sign}(Z + K_5\dot{Z}) & 当\ |Z + K_5\dot{Z}| \geqslant \bar{Z}\ 时 \\ |\nu|\mathrm{sign}[(\nu(t_{k-1})] & 当\ |Z + K_5\dot{Z}| < \bar{Z}\ 时 \end{cases} \tag{6-5-44}$$

其中 Z 为侧向运动参数，例如是前面定义的横程，$\bar{Z}$ 为侧向控制边界。

$$\left.\begin{aligned} \bar{Z} &= C_1 + C_2(v/v_e) \\ K_5 &= C_3 + C_4(v/v_e) \end{aligned}\right\} \tag{6-5-45}$$

由于 $\bar{Z}$ 是速度 v 的线性函数，再入速度基本上是递减的，故

侧向控制边界呈“漏斗形”。

在侧向制导方程中，$K_5\dot{Z}$项的引进是为了防止侧向运动的过调，因为ν的反号并不等于Z的反号，而近似等于$\dot{Z}$的反号，式中加上一个微分项可以改善侧向运动性能。

系数C_1、C_2、C_3和C_4的选择应综合考虑到在各种干扰条件下，飞船制导控制系统的制导控制能力。通常要反复迭代才能确定。

侧向制导中漏斗形的中心线(面)因横程的定义不同有不同的定义。

①在球面上定义纵程和横程时，其漏斗的中心线为过再入点的星下点和开伞点的大圆弧$ef^{\sim}$，侧向运动参数取球面上定义的横程，而Z表示在大圆弧$ef^{\sim}$两边在球面上的边界线。

②用标准再入纵平面的垂线定义横程，其漏斗的中心实际上是一个面，即过e点、$f^{\sim}$点和地心的标准再入纵平面，漏斗的边界也是在标准再入纵平面两边的两个曲面(或平面)。

侧向制导方程中的侧向运动参数Z也可以定义为横程差(横坐标差)

$$Z = z_t - z_n \tag{6-5-46}$$

其中Z——横坐标差；

z_t——载人飞船在返回坐标系中的横坐标；

z_n——标准情况下载人飞船在返回坐标系中的横坐标。

此时漏斗的中心线为标准返回轨道在$o_o - x_oz_o$平面上的投影。此时的制导方程为：

$$\nu(t) = \begin{cases} -|\nu|\mathrm{sign}(z_t - z_n + K_5\dot{z}_t) & \text{当 } |z_t - z_n + K_5\dot{z}_t| \geqslant \bar{Z} \text{ 时} \\ |\nu|\mathrm{sign}[\nu(t_{k-1})] & \text{当 } |z_t - z_n + K_5\dot{z}_t| < \bar{Z} \text{ 时} \end{cases}$$

§6.5.5 再入纵向制导最佳反馈增益系数的确定

利用标准轨道再入纵向制导，除了用试验法和固化系数求其反馈增益系数外，还可以从二次型最优性能指标出发，选择反馈增

益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4，从而求得最优纵向制导规律。纵向制导规律的自变量可以是 $\bar{u}$、v，也可以是 t，本节讨论以 t 为自变量的情况，$\bar{u}$、v 为自变量的方法类似。

1．基本假设

为了获取纵向制导规律

$$\Delta(L/D)=\Delta(C_L/C_D)=K_1\Delta n_x+K_2\Delta\dot{h}+K_3\Delta R+K_4\Delta\dot{R} \tag{6-5-47}$$

中的反馈增益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4，可采用对简化的纵平面运动方程进行摄动的方法，之后再用庞特里亚金极小值原理，得到最优反馈增益系数。为工程上易于实现，将时变的增益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4逼近成常数或分段常数，得到所需的次优反馈增益系数。

简化的纵平面运动方程，需作如下假设：

①地球形状、引力模型：不考虑地球旋转，地球为一均质圆球。即 $\boldsymbol{g}=-(fM/r^3)\boldsymbol{r}$.

②大气模型：高度在91km 以下采用标准大气的分段函数模型，91km 以上采用数值插值办法得到。

③再入过程采用配平攻角飞行，$\alpha=\eta_{tr}$，$\beta=0$

$$C_D=C_D(M)$$

$$(C_L/C_D)_0=(C_L/C_D)(M)$$

纵向运动的升阻比$(L/D)_0=(L/D)\cos\nu_0$，ν_0由三自由度标准返回轨道设计给出。这时纵平面运动方程可用式(2-5-23)直接写出：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=-C_D\frac{\rho v^2}{2m}S-g\sin\Theta\\ \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_0 C_D\frac{\rho vS}{2m}+\left(\frac{v}{r}-\frac{g}{v}\right)\cos\Theta\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}&=v\sin\Theta\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}&=\frac{r_f v}{r}\cos\Theta\end{aligned}\right\}\tag{6-5-48}$$

其中：Θ 为当地速度倾角；

$r_f=r_p+h_f$；r_p 为地球平均半径，一般取6371.004km，h_f 为开伞点的高度；

$g=\dfrac{fM}{r^2}=g_0\left(\dfrac{r_p}{r}\right)^2$；

R 为开伞点高度处，假想球面上的纵程。

在式(6-5-47)中，n_x 为切向过载，

$$n_x=\frac{C_D\rho v^2S}{2mg_0}\tag{6-5-49}$$

2. 纵平面运动方程的线性化方程

将式(6-5-48)对标准返回轨道线性化可得：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\dot{v}&=a_{11}\Delta v+a_{12}\Delta\Theta+a_{13}\Delta h\\ \Delta\dot{\Theta}&=a_{21}\Delta v+a_{22}\Delta\Theta+a_{23}\Delta h+b\Delta(C_L/C_D)\\ \Delta\dot{h}&=a_{31}\Delta v+a_{32}\Delta\Theta\\ \Delta\dot{R}&=a_{41}\Delta v+a_{42}\Delta\Theta+a_{43}\Delta h\end{aligned}\right\}\tag{6-5-50}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=-C_D\rho vS/m-[\rho v^2S/(2ma)](\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)\\ a_{12}&=-g\cos\Theta\\ a_{13}&=[\rho v^3S/(2ma^2)](\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h)-[C_Dv^2S/(2m)]\\ &\quad\cdot(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h)+(2g/r)\sin\Theta\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{21} &= (C_L/C_D)_0[C_D\rho vS/(2m)] + (g/v^2 + 1/r)\cos\Theta \\
&\quad + (C_L/C_D)_0[\rho vS/(2ma)](dC_D/dM) \\
a_{22} &= (g/v - v/r)\sin\Theta \\
a_{23} &= -(C_L/C_D)_0[\rho v^2S/(2ma^2)](dC_D/dM)(da/dh) \\
&\quad + (C_L/C_D)_0C_D[vS/(2m)](d\rho/dh) + [2g/(vr) \\
&\quad - v/r^2)]\cos\Theta \\
b &= C_D\rho vS/(2m) \\
a_{31} &= \sin\Theta \\
a_{32} &= v\cos\Theta \\
a_{41} &= (r_f/r)\cos\Theta \\
a_{42} &= -(r_fv/r)\sin\Theta \\
a_{43} &= -(r_fv/r^2)\cos\Theta
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-51}
$$

其中：声速 $a=\sqrt{kT}=20.0468\sqrt{T}$；

$k=401.8741902\mathrm{m^2/s^2\cdot K}$

绝对温度 $T=T(h)=T(r-r_p)$；

马赫数 $M=v/a$

密度 $\rho=\rho(h)$

由式(6-5-49)线性化过载系数可得

$$
\Delta n_x = a_{51}\Delta v + a_{53}\Delta h \tag{6-5-52}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{51} &= -C_D\rho vS/(mg_0) - \rho v^2S/(2mg_0a)(dC_D/dM) \\
a_{53} &= [\rho v^3S/(2mg_0a^2)](dC_D/dM)(da/dh) \\
&\quad - [C_Dv^2S/(2mg_0)](d\rho/dh)
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-53}
$$

由式(6-5-50)后两式和式(6-5-52)可得：

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta v &= b_{11}\Delta n_x + b_{12}\Delta\dot{h} + b_{13}\Delta R + b_{14}\Delta\dot{R} \\
\Delta\Theta &= b_{21}\Delta n_x + b_{22}\Delta\dot{h} + b_{23}\Delta R + b_{24}\Delta\dot{R} \\
\Delta h &= b_{31}\Delta n_x + b_{32}\Delta\dot{h} + b_{33}\Delta R + b_{34}\Delta\dot{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}54)
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
b_0 &= a_{31}a_{42}a_{53} - a_{32}a_{41}a_{53} + a_{32}a_{43}a_{51} \\
b_{11} &= a_{32}a_{43}/b_0 \\
b_{12} &= a_{42}a_{53}/b_0 \\
b_{13} &= 0 \\
b_{14} &= -a_{32}a_{53}/b_0 \\
b_{21} &= -a_{32}a_{43}/b_0 \\
b_{22} &= (a_{43}a_{51} - a_{41}a_{53})/b_0 \\
b_{23} &= 0 \\
b_{24} &= a_{31}a_{53}/b_0 \\
b_{31} &= (1 - a_{51}b_{11})/a_{53} \\
b_{32} &= -a_{51}b_{12}/a_{53} \\
b_{33} &= 0 \\
b_{34} &= -a_{51}b_{14}/a_{53}
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}55)
$$

现将式(6-5-54)记为

$$
(\Delta v, \Delta\Theta, \Delta h)^T = \boldsymbol{B}_{3\times 4}\cdot(\Delta n_x, \Delta\dot{h}, \Delta R, \Delta\dot{R})^T \qquad (6\text{-}5\text{-}56)
$$

要求列写的方程式为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\Delta n_x}{dt} &= \dot{a}_{51}\Delta v + a_{51}\Delta\dot{v} + \dot{a}_{53}\Delta h + a_{53}\Delta\dot{h} \\
\frac{d\Delta\dot{h}}{dt} &= \dot{a}_{31}\Delta v + a_{31}\Delta\dot{v} + \dot{a}_{32}\Delta\Theta + a_{32}\Delta\dot{\Theta} \\
\frac{d\Delta R}{dt} &= \Delta\dot{R}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\dot{R}}{\mathrm{d}t} = \dot{a}_{41}\Delta v + a_{41}\Delta\dot{v} + \dot{a}_{42}\Delta\Theta + a_{42}\Delta\dot{\Theta} + \dot{a}_{43}\Delta h + a_{43}\Delta\dot{h} \tag{6-5-57}$$

将式(6-5-50)中 $\Delta\dot{v},\Delta\dot{\Theta},\Delta\dot{h}$ 代入上式，则可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta n_x,\Delta\dot{h},\Delta R,\Delta\dot{R})^T = C_{4\times3}\cdot(\Delta v,\Delta\Theta,\Delta h)^T + (0,a_{32}b,0,a_{42})^T\Delta(C_L/C_D)_0 \tag{6-5-58}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
C_{11} &= \dot{a}_{51} + a_{51}a_{11} + a_{53}a_{31}\\
C_{12} &= a_{51}a_{12} + a_{53}a_{32}\\
C_{13} &= \dot{a}_{53} + a_{51}a_{13}\\
C_{21} &= \dot{a}_{31} + a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21}\\
C_{22} &= \dot{a}_{32} + a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22}\\
C_{23} &= a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23}\\
C_{31} &= a_{41}\\
C_{32} &= a_{42}\\
C_{33} &= a_{43}\\
C_{41} &= \dot{a}_{41} + a_{41}a_{11} + a_{42}a_{21} + a_{43}a_{31}\\
C_{42} &= \dot{a}_{42} + a_{41}a_{12} + a_{42}a_{22} + a_{43}a_{32}\\
C_{43} &= \dot{a}_{43} + a_{41}a_{13} + a_{42}a_{23}
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-59}$$

$$\dot{a}_{51} = [\rho S/(mg_0)]\{-[2M(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M) + C_D + 0.5M^2(\mathrm{d}^2C_D/\mathrm{d}M^2)]\cdot(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) + [(-C_Dv/\rho)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h) + 1.5M^2(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)\cdot(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h) - 0.5(vM/\rho)(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h) + 0.5M^3\cdot(\mathrm{d}^2C_D/\mathrm{d}M^2)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h](\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)\}$$

$$\dot{a}_{53} = [\rho S/(mg_0)]\{[-(C_Dv/\rho)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h) + 1.5M^2(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)\cdot(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h) + 0.5M^3(\mathrm{d}^2C_D/\mathrm{d}M^2)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h) - 0.5(vM/\rho)\cdot$$

$$(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h)](\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) + [-0.5(C_D v^2/\rho)$$
$$(\mathrm{d}^2\rho/\mathrm{d}h^2) + (vM^2/\rho)(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}h)$$
$$- M^3(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h)^2 - 0.5M^4(\mathrm{d}^2C_D/\mathrm{d}M^2)\cdot$$
$$(\mathrm{d}a/\mathrm{d}h)^2 + 0.5vM^2(\mathrm{d}C_D/\mathrm{d}M)(\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}h^2)](\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)\}$$

$$\dot{a}_{31} = \cos\Theta(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t)$$
$$\dot{a}_{32} = \cos\Theta(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) - v\sin\Theta(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t)$$
$$\dot{a}_{41} = -(r_f/r)\sin\Theta(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t) - (r_f/r^2)\cos\Theta(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)$$
$$\dot{a}_{42} = -(r_f/r)\sin\Theta(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) - (r_f v/r)\cos\Theta(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t) + (r_f v/r^2)\sin\Theta\cdot(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)$$
$$\dot{a}_{43} = -(r_f/r^2)\cos\Theta(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) + (r_f v/r^2)\sin\Theta(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t) + (2r_f v/r^3)\cos\Theta(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)$$

令

$$\boldsymbol{X} = (\Delta n_x, \Delta h, \Delta R, \Delta\dot{R})^T$$
$$\boldsymbol{u} = \Delta(C_L/C_D)_0$$
$$\boldsymbol{G}_{4\times4} = \boldsymbol{C}_{4\times3}\cdot\boldsymbol{B}_{3\times4}$$
$$\boldsymbol{H}_{4\times1} = (0, a_{32}b, 0, a_{42}b)^T$$

则式(6-5-58)改写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{GX} + \boldsymbol{HU} \tag{6-5-60}$$

3. 最佳反馈增益系数的确定

经过线性化得到纵向小扰动状态空间方程式(6-5-60)，就可以用使二次型性能指标最优的线性控制来求解反馈增益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4。

取性能指标

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{U})\mathrm{d}t \tag{6-5-61}$$

其中 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$ 为非负定阵，$\boldsymbol{R}$ 为正定阵。

$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$ 阵的选择十分重要，下面的形式可供选择：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1/\Delta n_{xf}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/\Delta \dot{h}_f^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\Delta R_f^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\Delta \dot{R}_f^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1/\Delta n_{xm}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/\Delta \dot{h}_m^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\Delta R_m^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\Delta \dot{R}_m^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{\delta[\Delta(C_L/C_D)_0]_m^2}$$

其中Δn_{xf}，$\Delta \dot{h}_f$，ΔR_f，$\Delta \dot{R}_f$ 为落点期望的精度；

Δn_{xm}，$\Delta \dot{h}_m$，ΔR_m，$\Delta \dot{R}_m$ 为状态允许的最大偏差；

$\delta[\Delta(C_L/C_D)_0]_m$ 为允许的最大控制偏差。

利用极小值原理，哈密尔顿函数为：

$$H_u=\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{U} \tag{6-5-62}$$

其共轭方程及横截条件为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\left(\frac{\partial H_u}{\partial \boldsymbol{X}}\right)=-\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} \tag{6-5-63}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}(t_f) \tag{6-5-64}$$

由极小值原理，最优控制 $\boldsymbol{U}^*$ 使 H 取极小值即

$$\left.\frac{\partial H_u}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_{U^*}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^*+\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{6-5-65}$$

因 $\boldsymbol{R}$ 是正定的，其逆必存在，故

$$U^{*} = -R^{-1}H^{T}\lambda \tag{6-5-66}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}X^{*}}{\mathrm{d}t} = GX^{*} - HR^{-1}H^{T}\lambda^{*} \\
&\frac{\mathrm{d}\lambda^{*}}{\mathrm{d}t} = -G^{T}\lambda^{*} - QX^{*} \\
&X^{*}(t_0) = X_0 \\
&\lambda^{*}(t_f) = FX^{*}(t_f)
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-67}$$

注意到上述方程是线性的，且 $X^{*}(t_f)$ 与 $\lambda^{*}(t_f)$ 有线性关系，因此可假设 $\lambda = PX$，则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}X + P\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}X + P(GX + HU) \\
&= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}X + P(GX - HR^{-1}H^{T}PX)
\end{aligned} \tag{6-5-68}$$

注意式(6-5-67)和式(6-5-68)，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + PG - PHR^{-1}H^{T}P + G^{T}P + Q\right)X = 0 \tag{6-5-69}$$

由 X 的任意性，可得黎卡提(Riccati)微分方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -PG - G^{T}P + PHR^{-1}H^{T}P - Q \\
&P(t_f) = F
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-70}$$

最优控制为

$$U^{*} = -R^{-1}H^{T}PX \tag{6-5-71}$$

最佳反馈增益系数为

$$K = -R^{-1}H^{T}P \triangleq (K_1, K_2, K_3, K_4)^{T} \tag{6-5-72}$$

由此可见，反向积分 Riccati 微分方程，即可得到反馈增益系数 K. 因为 G、H、Q、R 在 (t_0, t_f) 上都是连续函数，所以 Riccati 方程

在(t_0,t_f)上满足边界条件的解是存在的，而且是唯一的。

求出最优控制后，需进一步验证它确能使性能指标J极小。研究二次型X^TPX

$$\frac{\mathrm{d}X^TPX}{\mathrm{d}t}=(X^TG^T+U^TH^T)PX+X^T(-PG-G^TP$$
$$+PHR^{-1}H^TP-Q)X+X^TP(GX+HU) \tag{6-5-73}$$

由t_0到t_f积分上式，则得

$$X^T(t_f)FX(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}(X^TQX+U^TRU)\mathrm{d}t$$
$$=X_0^TP(0)X_0+\int_{t_0}^{t_f}(U+R^{-1}H^TPX)^TR(U+R^{-1}H^TPX)\mathrm{d}t$$

即

$$J=\frac{1}{2}X_0^TP(0)X_0+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(U$$
$$+R^{-1}H^TPX)^TR(U+R^{-1}H^TPX)\mathrm{d}t$$

上式右边第一项与U的选择无关，第二项因R为正定阵为正数，故当

$$U=-R^{-1}HPX=KX \tag{6-5-74}$$

时，J取极小值。这就说明这个以状态反馈形式构成的控制规律确能使性能指标J为极小。

4. 最佳反馈增益系数的仿真分析

以某载人飞船为例进行数学仿真分析。求解 Riccati 微分方程的主要问题是选择性能指标中的三个权矩阵F、Q、R，采用经验选择法，得到变化的最佳反馈增益系数如图6-46～图6-49所示。

取权矩阵F、Q、R如下：

$F=\mathrm{diag}[(1/0.1^2),(1/250^2),(1/200^2),(1/500^2)]$

$Q=\mathrm{diag}[(1/0.5^2),(1/750^2),(1/7500^2),(1/2000^2)]$

$R=1/0.06^2$

为了简化制导规律，将时变的 K_1、K_2和 K_4逼近成常数，将 K_3逼近成两段常数，得到次优的反馈增益系数

$K_1=-0.60$

$K_2=-0.15\times10^2\ \mathrm{s/m}$

$$K_3=\begin{cases}-0.56\times10^{-5}1/m, & t\leqslant 400\mathrm{s}\\ -0.22\times10^{-4}1/m, & t>400\mathrm{s}\end{cases}$$

$K_4=-0.74\times10^3\ \mathrm{s/m}$

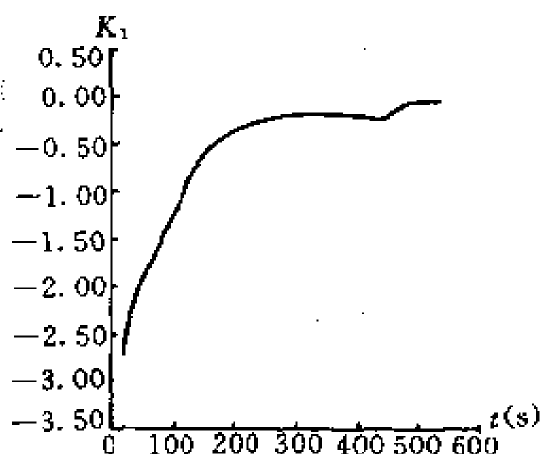


图6-46 时变的反馈增益系数 $K_1(t)$

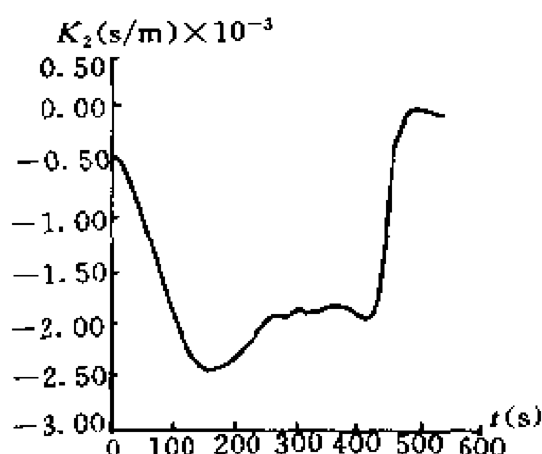
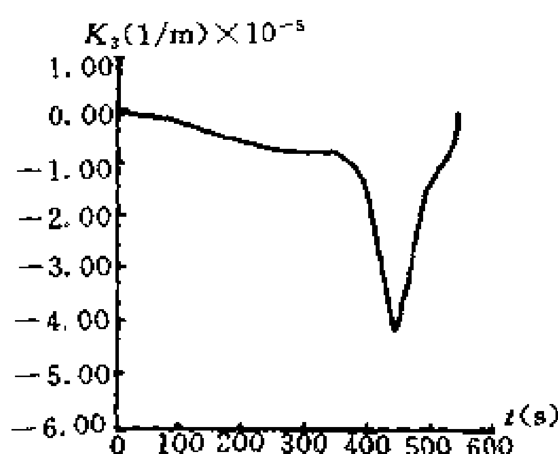


图6-47 时变的反馈增益系数 $K_2(t)$

用解 Riccati 微分方程的方法，可求得最佳反馈增益系数 K_1、K_2、K_3和 K_4. 解决了用经验法求反馈增益系数理论分析不够的缺陷，但也带来如何确定权矩阵 **F**、**Q**、**R** 的问题。通过大量的数学仿真分析，权矩阵 **R** 对反馈增益系数的影响较大，但反馈增益系数对 **F**、**Q** 并不很敏感。究竟怎样选择权矩阵 **F**、**Q**、**R**，除了通过 **F**、**Q**、**R** 的含义进行选择，主要要通过制导轨道仿真来看反馈增益系数是否能满足制导要求而定，并且，经过制导轨道的大量仿真计算，对 **F**、**Q**、**R** 进行适当的修正。光靠选择权矩阵，往往很困难，权矩阵



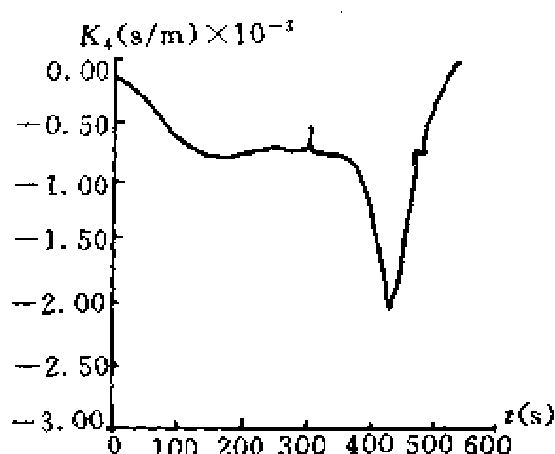


图6-48　时变的反馈增益系数 $K_3(t)$　　图6-49　时变的反馈增益系数 $K_4(t)$

给出的是一个综合指标，各分指标之间较难协调。

用常系数来逼近时变增益系数，进行制导是可以的。经过仿真可知，对应于 Δn_x，$\Delta\dot{h}$，$\Delta\dot{R}$的反馈增益系数 K_1、K_2、K_4逼近一个常数是可行的，但对应于 ΔR 的反馈增益系数 K_3应逼近成二个常数，原因是 K_3这个系数较敏感，直接对应于纵程的控制。且 K_3的绝对值当飞行时间较小时，ΔR 可能较大，K_3的绝对值应小一些，不使 $\Delta(L/D)$过大，当飞行时间较大时，ΔR 可能较小，为形成一定量的 $\Delta(L/D)$值，K_3的绝对值应大一些。

前面讨论了以 t 为自变量的求最佳反馈增益系数的方法。类似地可以得到以 v、$\bar{u}$ 为自变量求最佳反馈增益系数的方法。

将 t、v 和 $\bar{u}$ 为自变量求得的反馈增益系数用于同样的轨道仿真，发现无论以 t 为自变量，还是以 v、$\bar{u}$ 为自变量均能较好的完成任务。只是以 t 为自变量的反馈增益系数变化大一些，但 t 是单调的，而以 v 和 $\bar{u}$ 为自变量的反馈增益系数变化缓慢些，但再入过程中 v 和 $\bar{u}$ 并非一直是单调下降的。

§6.6　载人飞船返回再入制导误差分析

载人飞船返回再入过程中制导控制的任务是保证载人飞船在一定精度范围内，在预定的着陆区安全着陆。返回再入过程的控制如果达不到设计要求，就会使落点偏离预定区域，总吸热量超过设计限度，过载超过航天员或仪器承受的最大值，严重时可能使载人飞船损坏或失踪，甚至还可能危及航天员的生命，因此必须充分考虑影响飞船返回再入制导的各种因素。各种误差源及其计算方法在§6-5-3已经讨论。本节讨论有再入制导时载人飞船开伞点星下点的误差统计分析。同时为了了解返回再入轨道运动参数的最大偏差量，要进行返回再入轨道最大偏差量的计算。

§6.6.1　开伞点星下点位置误差统计分析

前面已讨论无再入制导时开伞点星下点位置误差分析，说明无再入制导位置偏差满足不了位置偏差不超过几十公里的要求，达到二百公里量级，所以再入制导是必须的，下面讨论有制导时，位置偏差的计算方法。

开伞点处星下点位置偏差统计分析，需要研究两大方面的问题，一方面是各误差的单项影响，另一方面是各误差的综合影响。下面分别进行讨论。

(1)误差源的单项影响分析

根据误差源的模型，分别加到飞船的运动方程中，取其误差源的最大值(3σ 值)，进行数字仿真计算，利用求差法与标准返回轨道比较，即分别确定出各单项误差源所造成的载人飞船在开伞点处星下点的最大位置偏差 ΔR_i、ΔZ_i，进一步用“最大偏差法”可求得载人飞船在开伞点处星下点位置偏差分布的标准方差。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\Delta R} &= \frac{1}{3}\Big(\sum_{i=1}^{m}\Delta R_i^2\Big)^{1/2} \\ \sigma_{\Delta z} &= \frac{1}{3}\Big(\sum_{i=1}^{m}\Delta Z_i^2\Big)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{6-6-1}$$

(2)误差源的综合影响分析

首先用蒙特卡罗方法对返回再入段的 m 个误差源进行随机抽样，产生 N 组随机误差源：

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{mi})^T \qquad i = 1, \cdots, N \tag{6-6-2}$$

然后分别进行数字计算，求出在随机干扰源作用下的误差轨道，利用求差法与标准轨道比较即可确定出飞船在开伞点处星下点位置偏差的大量样本 ΔR_i、$\Delta Z_i (i=1,\cdots,N)$。

根据数理统计理论，即可确定样本的方差

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_{\Delta R} &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta R_i^2\right)^{1/2} \\ \sigma_{\Delta z} &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta Z_i^2\right)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{6-6-3}$$

(3)仿真分析举例

对某载人飞船进行仿真计算，其结果如表6.5和表6.6，其中表6.5给出了单项误差统计分析结果，表6.6给出了综合误差蒙特卡洛随机抽样统计分析结果。

表6.5　最大偏差法统计分析结果

纵程偏差(km)(3σ)	横程偏差(km)(3σ)
15.74	7.96

表6.6 蒙特卡洛法统计分析结果

随机抽样轨道数	开伞点处星下点位置误差	
N(条)	纵程偏差(km)(σ)	横程偏差(km)(σ)
100	5.23	2.43
200	5.17	2.39
300	5.18	2.50
400	5.11	2.37
500	5.06	2.53
550	5.12	2.61

从表6.6看出：随机抽样干扰轨道数100，200，300，400，500条时的统计结果均比较接近，说明随机抽样模拟仿真干扰轨道数大于等于100条即能满足要求。从表6.5和表6.6看出，随机抽样统计分析的结果与单项误差统计分析的结果基本接近，说明在载人飞船开伞点星下点处误差分析讨论时，既可采用单项误差统计分析(最大偏差法)，也可采用随机抽样统计分析(蒙特卡洛法)，两者都能良好地反映出干扰因素对载人飞船制导精度的影响。

从误差源的单项影响分析可以得出影响开伞点星下点位置精度的主要因素是气动系数的不确定性，阻力系数的加大，升力系数的减小将使纵程误差减小很多，占到主导地位，所以将气动力系数测准是十分重要的。其次大气密度的不确定性对纵程也有较大影响。制动角的误差，制动点的飞行方向偏差对纵程和横程也有一定的影响。

随机抽样的500条轨道，除个别轨道位置偏差稍偏大外，一般均在3σ偏差之内，过载绝大多数小于$4g$.

§6.6.2 返回舱再入轨道最大偏差位置

载人飞船返回舱再入大气层后，大约在85km 高度，返回舱的制导、导航和控制系统(GNC 系统)开始工作，然后很快进入黑障区，约飞行6min 出黑障区。由于再入环境恶劣、返回舱受力复杂，一旦 GNC 系统出现故障，返回舱将由弹道一升力式再入改为弹道式再入，两种再入方式的落点相差数百公里，为判断是何种再入方式，必须建立返回舱正常再入管道或安全管道。

正常的安全管道是指返回舱从再入点位置到开伞点的位置，受到各种干扰作用且是正常的弹道—升力式再入时，返回舱飞行的位置一定位于某管道内，该管道便是正常的安全管道。显然该管道的位置、形状与标准返回轨道、再入段误差、再入段的制导控制能力有关。安全管道的计算，实际上就是计算从再入点到开伞点的最大偏差位置。

计算可以采用两种方法：

(1)采用蒙特卡洛随机抽样法确定最大偏差位置

首先用蒙特卡洛方法对再入段的 m 个误差源随机抽样产生 N 组随机误差源，然后分别进行计算求出在随机干扰作用下的误差轨道，再利用求差法求出等时(或等高)的与标准轨道位置偏差的大量样本 $\Delta x(t)$、$\Delta y(t)$、$\Delta z(t)$[或者 $\Delta x(h)$、$\Delta y(h)$、$\Delta z(h)$]。

用数理统计理论可以确定样本的方差

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\Delta x}(t) &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2\right)^{1/2}\\ \sigma_{\Delta y}(t) &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y_i)^2\right)^{1/2}\\ \sigma_{\Delta z}(t) &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta z_i)^2\right)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{6-6-4}$$

再认为

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta x_{max}(t) &= 3\sigma_{\Delta x}(t) \\
\Delta y_{max}(t) &= 3\sigma_{\Delta y}(t) \\
\Delta z_{max}(t) &= 3\sigma_{\Delta z}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{6-6-5}
$$

便可以求出位置大偏差量

(2)采用"最大偏差法"求位置最大偏差量

根据再入段误差源的模型，分别取误差源的最大值(3σ)计算偏差轨道，再利用求差法求出与标准返回再入轨道的位置偏差Δx_i、Δy_i、Δz_i，进一步用最大偏差法求出等时或等高的位置最大偏差量

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta x_{max}(t) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2\right)^{1/2} \\
\Delta y_{max}(t) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \Delta y_i^2\right)^{1/2} \\
\Delta z_{max}(t) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i^2\right)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{6-6-6}
$$

如果还要知其他参数的最大偏差量，如过载随高度(或时间)的最大偏差量，可用§6.3.3式(6-3-1)或式(6-3-3)计算等时或等高的返回再入轨道的最大偏差量。

§6.7 载人飞船利用预测能力制导方法简介

利用预测能力的制导方法(简称预测制导)是一个有发展潜力的制导方法。

它的基本思想是在飞船上实时计算飞船的再入轨道和着陆点，将计算得到的预测落点与理论落点进行比较，利用其偏差产生控制信号，在保证过载和热流满足要求的条件下，调节升力方向，改变再入轨迹，达到消除落点偏差的目的。

它与利用标准轨道法的制导不同之处在于：它不着眼于使实

际轨道接近标准返回再入轨道来消除落点偏差，而是从当前的状态出发，选择一条轨道，使飞船在理论落点附近着陆。显然这种方法对初始条件不敏感，得到的信息多且可以达到比标准轨道法更高的落点精度。

根据计算落点位置的不同方法，预测制导方法分两种，一种是快速预测法，另一种是近似预测法。

(1)快速预测法

快速预测法就是通过飞船上的计算机，实时对飞船的运动方程进行快速运算来确定未来的飞行轨迹和落点位置，并根据落点偏差对升力进行调整，即改变倾侧角 $\nu(t)$，以使最终的落点偏差较小。

快速预测法的主要优点是：它能处理任何可能的飞行条件，能提前预测落程、过载、热流的情况，使之具有很强的适应能力。但是由于要快速预测，它对飞船上的计算机提出了严格的要求。

(2)近似预测法

近似预测法是从所有可能的飞行轨道或部分轨道中找出一个近似的解析解。

大气层外可用椭圆轨道的解析解法，大气层内在某些条件下可以得到近似解，例如通过控制以保持负加速度不变的再入器，从初速 $\bar{u}_i$ 到末速 $\bar{u}_f$ 范围内的射程近似解为：

$$\frac{x}{r}=\frac{\bar{u}_i^2-\bar{u}_f^2}{2(D/W)} \tag{6-7-1}$$

其中x——落点航程；

r——地心距离；

D——阻力；

W——重量。

还有其它一些近似解，详见文献[2]。

将再入轨道分成若干段，每一段用近似解析解求解，因是解析

解，计算轨道和落点将十分方便。

利用近似解析解进行再入制导，对船载计算机要求不太高是其优点，但其不能灵活地处理脱离设计要求的情况是其明显的缺点。

下面只研究利用快速预测法的预测制导。

§6.7.1 纵程和横程同时控制的预测制导

预测制导是根据飞船的实际飞行状态来预测以后的飞行状态。所谓纵程和横程同时控制就是要同时计算纵程和横程，并用它来进行控制，所以它用的运动方程是空间质心运动方程。根据前面的讨论，要计算轨道除已知各种条件：空气动力系数、质量特性和大气条件外，很重要的是要知道控制变量 α、β 和 ν，根据配平飞行假设，$\alpha=\eta_{tr}$，$\beta=0$，则 $\nu_0(t)$便是唯一要确定的。

预测制导虽然不利用标准返回轨道，但预测制导也应事先设计一个 $\nu_0(t)$，所设计的 $\nu_0(t)$应保证无任何误差，包括惯性器件误差时可以飞到预计的落点（理论落点）。从某种意义上讲，这也是一个标准轨道，但控制轨道不是以标准轨道的状态参数为准，而是以 $\nu_0(t)$为准，所以它不同于利用标准轨道的制导。

因为船载计算机求解预报方程，即数值积分运动方程需要一定的时间，而这一阶段的控制指令无法形成，所以对 $\nu(t)$的校正是断续的。一般可把再入飞行时间分成若干个等时间间隔的 ΔT，并称之为校正时间间隔，它可表示成 $\Delta T=t_i-t_{i-1}$，其中 $i=1,2,\cdots,N$，这个 N 是时间间隔的个数，即整个飞行时间内形成控制指令的次数，也可称校正次数。ΔT 过小，预报计算未完成，当然不行，同时 ΔT 小，预报次数多，增加船载计算机的负担，所以 ΔT 应大一些，至少应大于预报落点所需要的时间，相反，ΔT 过大，虽然可减少预报次数，但预报时间间隔大，可能使 ΔT 内的偏差不能及时纠正，使预报的落点偏差过大，甚至失去控制。所以 ΔT 不宜过大，

一般可以取5～10s，如果随机干扰不十分严重，控制方法选择合适，可增加到10～30s.

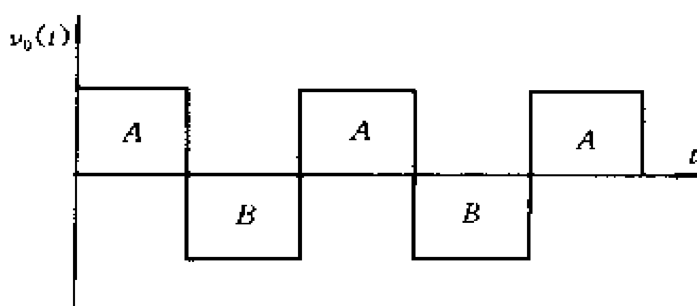


图6-50　预测制导时初始的 $\nu_0(t)$

设事先选择的 $\nu_0(t)$ 如图6-50所示。

$$\nu_0(t)=\begin{cases}\nu_1(t) & t\in A\\ \nu_2(t) & t\in B\end{cases} \tag{6-7-2}$$

A、B 分别对应于 $\nu_1(t)>0$ 和 $\nu_2(t)<0$ 的时间。

如何修改 $\nu(t)$，取决于制导方程。但选定了 $\nu_0(t)$ 后，只有两种情况，改变 ν_0 的大小或改变 $\nu_0(t)$ 反号的时间，或者同时改变 $\nu_0(t)$ 的大小和 $\nu_0(t)$ 改变符号的时间。一般地讲引入修正函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 相互独立。

如何修改 $\nu(t)$，或者如何引入修正函数有两种方式：

(1)方式一

令　$$\nu(t)=[1+\Delta W_1\varphi(t)]\cdot\nu_0(t+\Delta W_2\psi(t)) \tag{6-7-3}$$

其特点是通过 ΔW_1、$\varphi(t)$ 的变化，调整 ν_0 的大小，而通过 ΔW_2、$\psi(t)$ 调整 ν_0 的相位，进而控制 $\nu(t)$ 的符号。

(2)方式二

令　$$\nu(t)=\left.\begin{matrix}[1+\Delta W_1\varphi(t)]\nu_0(t) & t\in A\\ [1+\Delta W_2\psi(t)]\nu_0(t) & t\in B\end{matrix}\right\} \tag{6-7-4}$$

即 $\nu(t)$ 反号的时间不改变，或者说相位不调整，仅改变 ν 的大小。它是通过调整不同区域 A、B 的 $\nu_1(t)$ 和 $\nu_2(t)$ 的大小来达到控制的

目的。

下面具体讨论方式二的制导方程。$\varphi(t)$和$\psi(t)$可以取不同的形式，这里取最简单的情况，令$\varphi(t)=1$，$\psi(t)=1$. 这时的制导方程便是寻找满足一定性能指标要求的调节参数ΔW_1、ΔW_2使得$\nu(t)$能控制轨道达到预定的着陆点附近。

记
$$W(\Delta W_1,\Delta W_2)=\begin{cases}1+\Delta W_1 & t\in A\\ 1+\Delta W_2 & t\in B\end{cases} \tag{6-7-5}$$

考虑到控制量倾侧角$\nu(t)$实际上为分段连续的控制序列，取t_i时刻的实际控制量为$\nu_i(t)$，t_{i-1}时刻的控制量为$\nu_{i-1}(t)$，则
$$\nu_i(t)=W(\Delta W_1,\Delta W_2)\nu_{i-1}(t) \tag{6-7-6}$$

选择ΔW_1、ΔW_2有不同的方法，例如可提出某一性能指标，用优化的方法选择ΔW_1、ΔW_2使之满足要求。

现取最简捷的方法，即在线性化的基础上，选择ΔW_1、ΔW_2使纵程偏差、横程偏差等于零。

设ΔR_0和ΔZ_0为调节参数$\Delta W_1=\Delta W_2=0$时飞船的纵程和横程偏差，ΔR_f和ΔZ_f为ΔW_1、ΔW_2不为零时的纵程和横程偏差，则可以得到：
$$\left.\begin{aligned}\Delta R_f&=R(\Delta W_1,\Delta W_2)\\ \Delta Z_f&=Z(\Delta W_1,\Delta W_2)\end{aligned}\right\} \tag{6-7-7}$$

将式(6-7-7)进行台劳级数展开，且只取第一项，即线性化，可以得：
$$\left.\begin{aligned}\Delta R_f&=\Delta R_0+\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_1}\Delta W_1+\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_2}\Delta W_2\\ \Delta Z_f&=\Delta Z_0+\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_1}\Delta W_1+\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_2}\Delta W_2\end{aligned}\right\} \tag{6-7-8}$$

其中$\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_1}$、$\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_2}$为纵向偏差对调节参数$\Delta W_1$、$\Delta W_2$的偏导数；

$\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_1}$、$\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_2}$为横程偏差对调节参数$\Delta W_1$、$\Delta W_2$的偏导数。

显然四个偏导数可用求差法求得，它需要用三条轨道数据。

线性化方法选 ΔW_1、ΔW_2是在线性化意义上令 ΔR_f、ΔZ_f 等于零求 ΔW_1、ΔW_2.

令 $\Delta R_f=0$，$\Delta Z_f=0$由式(6-7-8)可得：

$$\left.\begin{aligned}\Delta R_0+\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_1}\Delta W_1+\frac{\partial\Delta R}{\partial\Delta W_2}\Delta W_2=0\\ \Delta Z_0+\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_1}\Delta W_1+\frac{\partial\Delta Z}{\partial\Delta W_2}\Delta W_2=0\end{aligned}\right\}\tag{6-7-9}$$

当 ΔR_0、ΔZ_0及四个偏导数已知时，可求出 ΔW_1和 ΔW_2. 故

$$\nu_i(t)=\left.\begin{matrix}(1+\Delta W_1)\nu_{i-1}(t) & t\in A\\ (1+\Delta W_2)\nu_{i-1}(t) & t\in B\end{matrix}\right\}\tag{6-7-10}$$

因为实际轨道方程不是线性的，所以一次校正并不会使 ΔR_f、ΔZ_f 为零，而要多校正几次，才能使之趋近于零。

预测制导重要的一个问题是校正时间间隔的选取问题。从减小船载计算机负担来看，ΔT 应该大一些，从提高精度着眼，ΔT 应小一些。但求偏导数需计算三条轨道，所以 ΔT 最小也不能小于计算机计算三条轨道的时间。ΔT 过大也不行，数字仿真表明：当 ΔT 在10～60s 之间时，制导规律对再入轨道控制是有效的，即预报落点，经过控制可把落点偏差控制在一定的范围之内。称这种情况的预报是收敛的，反之则可能发散，落点偏差过大。一般为达到较快的收敛，落点偏差较小，ΔT 应取10～30s.

因为要计算三条轨道，一般的船载计算机在 ΔT 内完成不了任务，这也是预测制导目前未达到广泛应用的原因。为了达到实际应用，可以把预测制导分成纵向和侧向制导，采用简化的运动方程。

§6.7.2 纵程和横程分开制导的预测制导

类似利用标准轨道的再入制导，可以把再入制导分成纵向和

侧向制导，且以纵向制导为主的方法，也可以把预测制导分成纵向制导和侧向制导。侧向制导采用利用标准轨道再入制导中侧向制导方法，用开关曲线进行控制，即侧向制导仅确定 $\nu(t)$ 的符号，预测制导仅对纵向制导而言。

1．预报方程

为了简化，可用纵平面运动方程，而最简单的是采用查普曼(Chapman)方程，由式(3-2-14)可得

$$\bar{u}Z'' - (Z' - \frac{Z}{\bar{u}}) = \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z}\cos^4\Theta - \sqrt{\beta r}(\frac{L}{D})\cos^3\Theta \tag{6-7-11}$$

它是一个二阶非线性微分方程，当给出两个初始条件，可数值积分得到再入轨道，利用下面几个方程可以得到热流、过载、纵程及再入时间。

热流：$q_s = k_s'\bar{u}^{5/2}Z^{1/2}(\frac{1}{\cos\Theta})^3$ (6-7-12)

过载水平分量：$n = \frac{\sqrt{\beta r}\bar{u}Z}{\cos\Theta}$ (6-7-13)

纵向距离：$\Delta S/r = \frac{1}{\sqrt{\beta r}}\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\cos\Theta}{Z}\mathrm{d}\bar{u}$ (6-7-14)

再入飞行时间：$T = \frac{1}{\sqrt{\beta g}}\int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1}\frac{\cos\Theta}{\bar{u}Z}\mathrm{d}\bar{u}$ (6-7-15)

2．初始倾侧角 $\nu_0(t)$ 的确定

类似利用标准返回再入轨道，$\nu_0(t)$ 的选择要考虑留有余量以便用于纵向制导和侧向机动。假设原运行轨道通过着陆点上空，选择一个合适的 $\nu_0(t)$，它可以是常值，也可以是分段常值，其符号的反号由侧向制导方程决定且使再入轨道通过着陆点上空。$\nu_0(t)$ 的选择要考虑再入过程中热流和过载的限制、自旋轨道落点和理论落点的航程差。

3. 制导方程

实际飞行时，由于存在着各种误差，会使实际的预测落点偏离理论落点，产生纵程偏差，假设所需倾侧角的大小是纵向距离 ΔR 的二次函数，可得如下制导方程：

$$\nu(t) = \nu_0(t) + f(D, v, \Delta R)\Delta R(C_1 + C_2|\Delta R|) \quad (6\text{-}7\text{-}16)$$

其中 $\nu_0(t)$ 为事先选定的基准倾侧角，C_1、C_2 为常数，$f(D, v, \Delta R)$ 为状态增益函数，它随阻力 D、速度 v 和纵程差 ΔR 的变化有所变化，$f(D, v, \Delta R)$ 由 ΔR 对 ν 的敏感度来定，兼顾阻力加速度，一般取决于经验。在机动能力较强的轨道上，$f(D, v, \Delta R)$ 的取值较小，即倾侧角的变化对 ΔR 的影响大时，$f(D, v, \Delta R)$ 要较小。由 C_1、C_2、$f(D, v, \Delta R)$ 提供的 $\nu(t)$ 要平滑的过渡到 $\nu_0(t)$.

仿真分析表明上述方法可以完成任务，但由于利用了查普曼方程，而查普曼方程当 $|\Theta|$ 较大时误差大，影响制导精度。

为了克服全程用查普曼方程带来的误差，可用组合预测制导。

组合预测制导时侧向制导和纵向制导分开，侧向制导用“漏斗式”的开关曲线制导，而纵向制导分成两段进行。从再入点到高度约40km 的 D_1 点，采用 Chapman 方程进行预测，因此时 $|\Theta| \leqslant 10°$ Chapman 方程的误差较小。从 D_1 点到开伞点，这段 $|\Theta| > 10°$，最大达60°以上，而且变化剧烈，若采用 Chapman 方程预测会导致较大的制导误差，故宜用平面弹道的精确方程进行预测。

由式(6-5-48)知平面轨道方程为：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -C_D\frac{\rho v^2 S}{2m} - g\sin\Theta \\
\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_0 C_D\frac{\rho v S}{2m} + \left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v}\right)\cos\Theta \\
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= v\sin\Theta \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= \frac{r_f v}{r}\cos\Theta
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}7\text{-}18)$$

预测轨道的热流和过载分别为：

$$q_s = \frac{C_s}{\sqrt{R_s}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{0.5}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{3.15} \tag{6-7-19}$$

$$n = \frac{D}{mg_0}(1 + (C_L/C_D)^2)^{1/2} \tag{6-7-20}$$

数值仿真表明：当$|\Theta_e|<6°$时用 Chapman 方程进行预报，而当$|\Theta_e|>6°$时用精确预测方程进行预报，能达到较好的制导精度。

§6.8 载人飞船六自由度轨道仿真及精度分析

§6.8.1 载人飞船从制动到着陆段飞行程序

载人飞船完成飞行任务后就进入了返回再入阶段。

返回再入阶段从飞行程序的角度上讲包括返回前准备、制动段、过渡段和再入段。

1. 返回前准备

在地面测控系统的支持下，按返回要求进行轨道调整和保持，使返回轨道满足预定的要求。

为使留轨待用的轨道舱和返回推进舱分离，应使三舱的轴线方向和三舱质心运动方向垂直，为此在给定时刻偏航姿态角转90°，之后轨道舱和返回推进舱分离。

当两舱分离后，再进行偏航、俯仰调姿，使返回推进舱的轴线方向在预定的推力方向上。

2. 制动段

制动段按设计要求是保持推力方向在惯性空间定向。

假设要求在惯性空间$\varphi_p=15°$，$\psi_p=\gamma_p=0°$.

本阶段是整个再入过程非常关键的阶段，从可靠性出发，选用

四个固定安装的双组元发动机分两组互为备份。每组由两个对角线上的发动机组成。

制动段发动机的工作时间由制动段关机方程确定。

3. 过渡段

当制动发动机停机后，两舱在惯性空间进行姿态保持，即要求 $\varphi_A=15°$、$\gamma_A=\psi_A=0°$. 当飞行到高度 $h=140$km 时，推进舱和返回舱两舱分离，因为两舱轴线在惯性空间保持，而从制动到 $h=140$km 处的射程角接近90°，故两舱轴线与速度方向基本垂直，便于两舱分离，不需要再进行调姿*. 当两舱分离后，要对返回舱进行调姿，要求在 $h=115$km 之前，将返回舱的俯仰姿态从制动段的惯性姿态15°转到并稳定在与当地地平线成−22°的姿态上。

4. 再入段

当飞行高度达到85km 左右，飞船轴向过载 $n_{x1}=0.04g$ 时，再入控制系统工作，俯仰、偏航通道采用速率阻尼使飞船在配平攻角附近作小振幅振动，而滚动角则按制导规律变化。在本阶段，导航信息来自捷联惯导系统，在80km—50km 左右的黑障区，GPS 接收机不能工作，出黑障区后，再由 GPS 修正飞船的导航数据，在高度降至10km 时，回收系统工作，保证飞船安全着陆。

§6.8.2 返回再入段姿态控制系统简介

1. 六自由度轨道仿真的特点

三自由度轨道仿真是以配平攻角飞行为基础，飞行器再入时以配平攻角飞行需要一个很好的近似，但也有其局限性。以配平攻角飞行，实际上认为飞行器是一个可控制的质点，且认为飞行器的姿态控制系统是理想的，能够通过姿态运动随时保证实现要求的

* 有的方案还要求调姿，偏航90°再分离。

速度滚动角 ν，且达到配平状态。但实际上飞行器并非质点，而是一个刚体，达到配平状态是一个过程。姿态控制系统根据误差产生控制力矩，使姿态角逐步达到要求值。因此实际上飞行器的攻角并非配平状态，侧滑角也不为零；滚动角也不能完全实现要求的滚动角。特别是要研究和设计姿态控制系统，再假设飞行器为可控制质点，控制系统是理想的，显然不合适。必须把飞行器当作刚体，而姿态控制系统也应按实际情况进行分析和设计。六自由度轨道仿真要尽量接近实际情况，为半实物仿真打下基础。如发动启动和关闭的延迟、惯性器件的误差、导航计算的周期、风的影响均应考虑。六自由度轨道仿真可以进一步验证所设计的姿态控制系统是否可行，也可以进一步对姿态控制系统的参数提出修改意见。六自由度轨道仿真得到的精度分析更接近真实情况。

2. 制动、过渡段姿态控制系统简介

制动段按要求是保持推力方向在惯性空间定向，按要求推力方向为 $\varphi_p=15°, \psi_p=\gamma_p=0$，其中 φ_p 为推力在惯性空间的定向，而制动之后为惯性空间保持，在两舱分离之后，为了达到配平状态，在俯仰通道要实行姿态跟踪。

总的来讲，从制动到再入段的 $n_{x1}=0.04g$，属于姿态跟踪和姿态保持，因此主要问题是如何计算输入量 φ^*、γ^*、ψ^* 的问题。

(1)从制动到两舱分离的导航制导图及 φ^*、γ^*、ψ^* 的计算

图6-51写出了从制动到两舱分离时的导航制导图，其中俯仰、偏航、滚动姿态控制系统同航天器在轨段的姿态控制系统。对每个轴控制律都一样。

图6-52画出了俯仰通道姿态控制示意图。

六自由度仿真计算的关键是如何计算输入量 φ^*、γ^*、ψ^*.

因为姿控系统是采用捷联惯导系统，φ^*、γ^*、ψ^* 均为船体姿态对返回坐标系 $o_o-x_oy_oz_o$ 的角度。但制动及过渡段要求是惯性空间

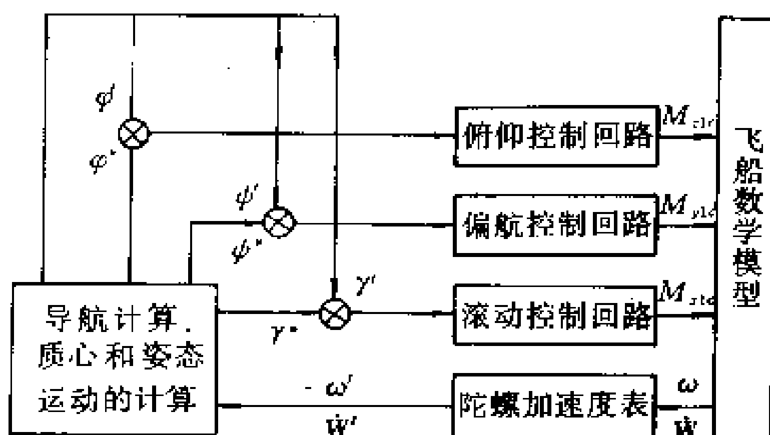


图6-51　两舱时导航制导方块图

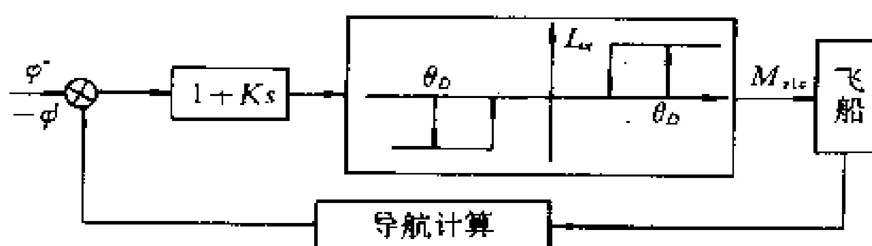


图6-52　俯仰通道姿态控制方块图

定向，即 $o_1-x_1y_1z_1$ 对平移坐标系三个欧拉角为

$$\psi_A=0、\gamma_A=0、\varphi_A=15°$$

利用矩阵之间的关系可以得

$$O_B(\varphi,\gamma,\psi)=O_A\begin{pmatrix}\cos\varphi_A & -\sin\varphi_A & 0\\ \sin\varphi_A & \cos\varphi_A & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{6-8-1}$$

其中

$$O_A = E_O^T \begin{bmatrix} \cos\omega_e T & \sin\omega_e T & 0 \\ -\sin\omega_e T & \cos\omega_e T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_O \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{6-8-2}$$

故

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma \\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma \\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_A & -\sin\varphi_A & 0 \\ \sin\varphi_A & \cos\varphi_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-8-3}$$

故

$$\left.\begin{aligned} -\sin\psi^* &= C_{31}\cos\varphi_A + C_{32}\sin\varphi_A \\ \mathrm{tg}\gamma^* &= \frac{\cos\psi^*\sin\gamma^*}{\cos\psi^*\cos\gamma^*} = \frac{-C_{31}\sin\varphi_A + C_{32}\cos\varphi_A}{C_{33}} \\ \mathrm{tg}\varphi^* &= \frac{\sin\varphi^*\cos\psi^*}{\cos\varphi^*\cos\psi^*} = \frac{C_{21}\cos\varphi_A + C_{22}\sin\varphi_A}{C_{11}\cos\varphi_A + C_{12}\sin\varphi_A} \end{aligned}\right\} \tag{6-8-4}$$

利用式(6-8-4)可以完成从制动到两舱分离时输入量 φ^*、γ^*、ψ^* 的计算。

(2)从两舱分离到达到要求配平状态之前 φ^*、γ^* 及 ψ^* 的确定

假设这一阶段的姿态控制系统与前一段完全相同，不同之处在于从高度 $h=140\text{km}$ 开始到 $n_{x1}=0.04g$ 之前要进行配平调姿，按要求从 $h=135\text{km}$ 开始，令 $\psi_A=\gamma_A=0$，但 $\varphi_A=\varphi_{AO}+\dot{\varphi}t_p$，其中 $\psi_A=\gamma_A=0$ 仍然是惯性空间保持，φ_A 要进行变化，φ_{AO} 是 $h=135\text{km}$ 的惯性空间俯仰角，$\dot{\varphi}=-4^\circ s^{-1}$，$t_p$ 是达到配平要求时俯仰角变化的时间。当已知 ψ_A、γ_A 及 φ_A 利用式(6-8-4)可求出 φ^*、γ^* 及 ψ^*. 问题是 t_p 为多少?t_p 是要保证 $h=h_p$ 时姿态角满足总体提出的要求，目前是与当地的俯仰角为-22°.

设返回舱轴 x_1 与当地水平夹角为 φ_T^*，则

$$\varphi_T^* = \arcsin \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x}_1^0}{r \cdot 1}$$

$\boldsymbol{r}$ 为地心矢，x_1^0 为沿 o_1x_1 轴方向的单位矢量。

记
$$\boldsymbol{r} = (x, \ y + R_o, \ z)^T$$
$$\boldsymbol{x}_1^0 = (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \ -\sin\psi)^T$$

则

$$\varphi_T^* = \arcsin \frac{x\cos\varphi\cos\psi + (y + R_o)\sin\varphi\cos\psi - z\sin\psi}{[x^2 + (y + R_o)^2 + z^2]^{1/2}} \tag{6-8-5}$$

当 $\varphi_T^* = -22°$ 时，停止 φ_A 的变化。

(3)配平状态飞行时 φ^*、γ^* 及 ψ^* 的确定

当 φ^*、γ^* 及 ψ^* 的确定改用由配平状态来确定时，此时 $\beta=0$，$\alpha=\alpha_{tr}$，$\nu=0$，因为 θ、σ 也已知，可以由八个欧拉角的关系式确定输入量 φ^*、γ^* 及 ψ^*。

$$\left.\begin{aligned} \varphi^* &= \mathrm{arctg}(\sin\varphi^* / \cos\varphi^*) \\ \gamma^* &= \mathrm{arctg}(\sin\gamma^* / \cos\gamma^*) \\ \psi^* &= \arcsin(\cos\alpha_{tr}\sin\sigma) \end{aligned}\right\} \tag{6-8-6}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi^* &= (1/\cos\psi^*)[\cos\alpha_{tr}\sin\theta\cos\sigma + \sin\alpha_{tr}\cos\theta] \\ \cos\varphi^* &= (1/\cos\psi^*)[\cos\alpha_{tr}\cos\theta\cos\sigma - \sin\alpha_{tr}\sin\theta] \\ \sin\gamma^* &= \sin\alpha_{tr}\sin\sigma/\cos\psi^* \\ \cos\gamma^* &= \cos\sigma/\cos\psi^* \end{aligned}\right\} \tag{6-8-7}$$

3. 再入段的制导方块图，γ_2^* 及 γ_2 的计算

再入段的转动方程是在第二返回舱坐标系分解，第二返回舱坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 是由返回舱坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 绕 o_1z_1 轴转动了一个 α_{tr} 角如图6-53所示。在设计时，尽量使再入开始时第二返回舱

坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 的各轴接近主惯性轴，而使 o_1x_2 轴接近配平攻角的速度方向，图6-53所示的 α_n 为正角 $\alpha_2=\alpha_1+\alpha_n$

返回舱坐标系和第二返回舱坐标系关系如下：

$$\begin{bmatrix} o_1x_2 \\ o_1y_2 \\ o_1z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o_1x_1 \\ o_1y_1 \\ o_1z_1 \end{bmatrix} \tag{6-8-8}$$

$$= \boldsymbol{B2_B}(\alpha_n) \begin{bmatrix} o_1x_1 \\ o_1y_1 \\ o_1z_1 \end{bmatrix}$$

载人飞船返回舱的姿态控制系统按惯例分成三个通道。滚动通道要根据制导规律确定的在第二返回舱坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 内的滚动角 γ_2^* 与实际在第二返回舱坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 内测量到的滚动角 γ'_2 之差进行控制，产生滚动力矩消除二者之差。而俯仰通道、偏航通道是保证沿第二返回舱坐标系的俯仰角速度 ω'_{z2} 和偏航角速度 ω'_{y2} 趋近于零。其示意图如图6-54～图6-56所示。上标带 * 号表示制导要求值，上标带"′"号表示实际测量值，它与实际值存在着偏差。

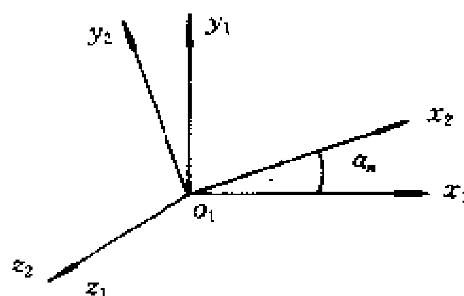


图6-53　$o_1-x_1y_1z_1$ 与 $o_2-x_2y_2z_2$ 的关系

(1)滚动通道姿态控制方块图

滚动通道的控制方块图如图6-54所示。

由图6-54知

$$\Delta_r = \bar{\Delta}_\gamma + \Delta_\gamma$$

$$\bar{\Delta}_\gamma = \begin{cases} \Delta_\gamma & \text{当 } |\Delta_\gamma| \leqslant x_m \text{ 时} \\ x_m \operatorname{sign}(\Delta_\gamma) & \text{当 } |\Delta_\gamma| > x_m \text{ 时} \end{cases}$$

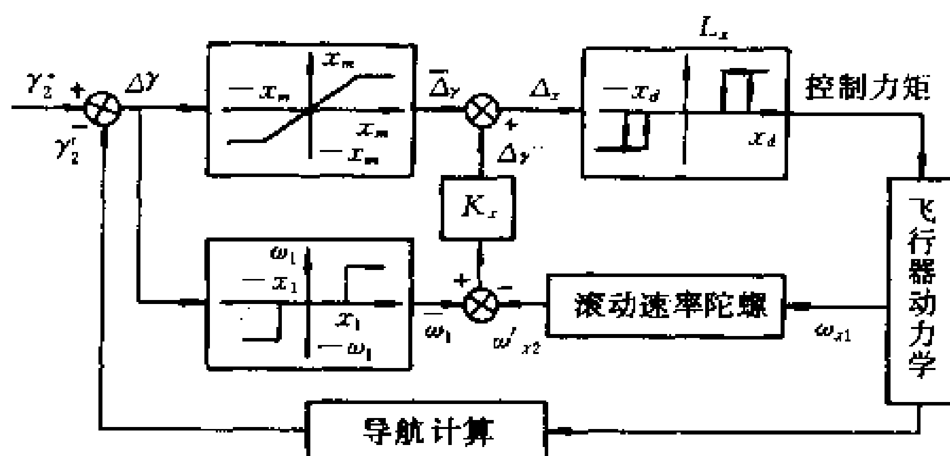


图6-54 滚动通道控制方块图

$$\Delta\gamma = \gamma_2^* - \gamma'_2$$

$$\Delta_\gamma = K_x(-\omega'_{x2} + \bar{\omega}_1)$$

$$\bar{\omega}_1 = \begin{cases} \omega_1 \operatorname{sign}(\Delta_\gamma) & \text{当 } |\Delta_\gamma| \text{时} \geqslant x_1 \\ 0 & \text{当 } |\Delta_\gamma| < x_1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$M_{xc} = \begin{cases} L_x \operatorname{sign}(\Delta_x) & \text{当 } |\Delta_x| \geqslant x_d \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |\Delta_x| \leqslant x_d(1-h) \text{ 时} \\ M_{xc}(t_{k-1}) & \text{当 } x_d(1-h) < |\Delta_x| \leqslant x_d \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } t = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (6\text{-}8\text{-}9)$$

(2)俯仰、偏航姿态控制方块图

俯仰通道的控制方块图如图6－55，俯仰通道的目的是使 $\omega_{z2}\to 0$，迅速达到平衡状态，即达到配平状态。

$$M_{zc} = \begin{cases} -L_z \operatorname{sign}(\omega'_{z2}) & \text{当 } |\omega'_{z2}| \geqslant z_d \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |\omega'_{z2}| \leqslant z_d(1-h) \text{ 时} \\ M_{zc}(t_{k-1}) & \text{当 } z_d \geqslant |\omega'_{z2}| > z_d(1-h) \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } t = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

(6-8-10)

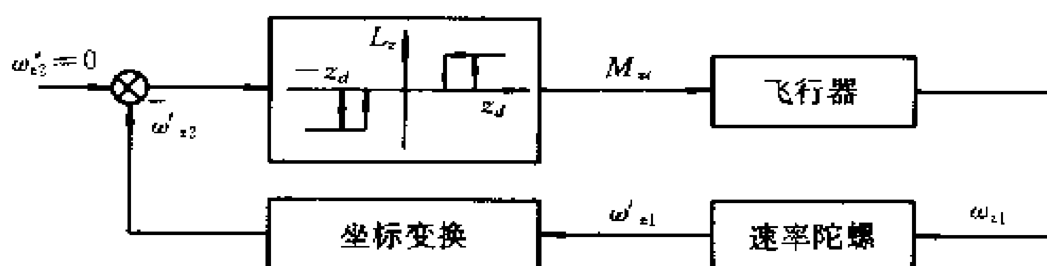


图6-55 俯仰通道控制方块图

偏航通道的控制方块图类似俯仰通道，如图6-56.

偏航通道的目的是使 $\omega_{y2}\to 0$，也就是达到平衡状态，即 $\beta\to 0$ 的状态。

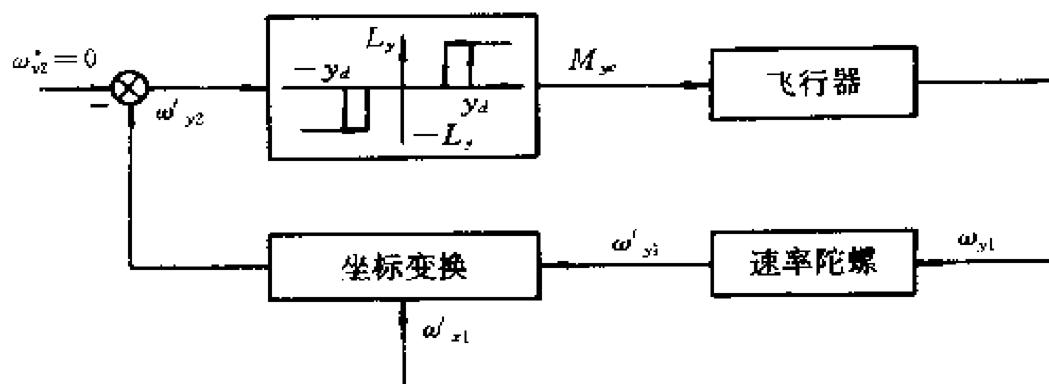


图6-56 偏航通道控制方块图

$$M_{yc}=\begin{cases}-L_y\,\mathrm{sign}(\omega'_{y2}) & 当\ |\omega'_{y2}|\geqslant y_d\ 时\\ 0 & 当\ |\omega'_{y2}|\leqslant y_d(1-h)\ 时\\ M_{yc}(t_{k-1}) & 当\ y_d>|\omega'_{y2}|>y_d(1-h)\ 时\\ 0 & 当\ t=0\ 时\end{cases} \tag{6-8-11}$$

(3)飞船再入时六自由度轨道仿真的导航制导结构图

飞船再入时返回舱制导控制方块图如图6-57，因为俯仰及偏航通道为角速度 ω_{x2}、ω_{y2} 的稳定系统，不需专门计算欧拉角。仅需计算 γ_2^* 及 γ_2，这是因为转动方程在第二返回舱坐标系进行列写带来的。

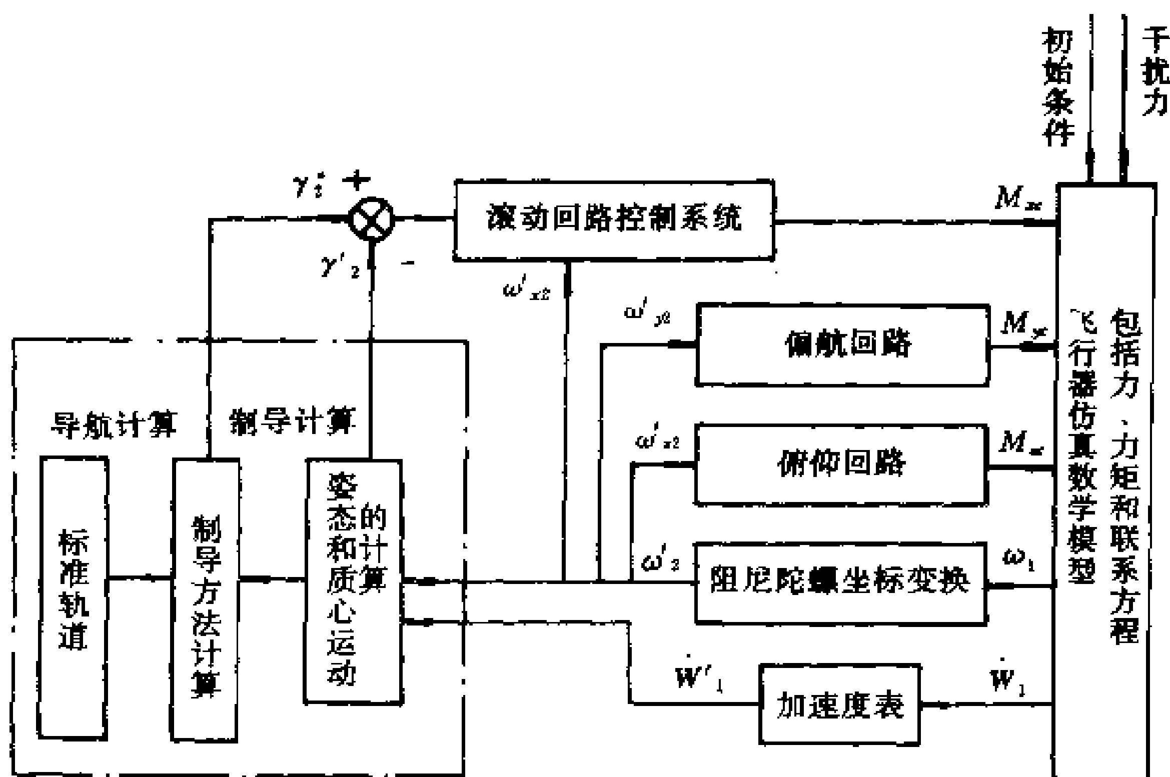


图6-57　再入段导航制导方块图

严格地讲三自由度轨道仿真时，纵向制导确定的速度滚动角 ν^*，不是升力沿速度方向的滚动角，而应该是总升力 Y_T（即 L）绕速度轴的滚动角，只是因为三自由度轨道仿真时，按配平攻角飞行假设，$\beta\equiv0$，总升力就是升力。

设总升力 Y_T 绕速度轴的滚动角为 γ_T^*（即§4.2中的 ϕ），则由

$$\cos\gamma_T^* = \frac{(L/D)K + \Delta(L/D)}{(L/D)} \qquad (6\text{-}8\text{-}12)$$

可以计算出要求的γ_T^*，而对应于γ_T^*时升力绕速度轴的滚动角ν^*可以按式(6-8-13)求出，γ_T^*、ν^*及ϕ_1的示意图如图6-58所示。

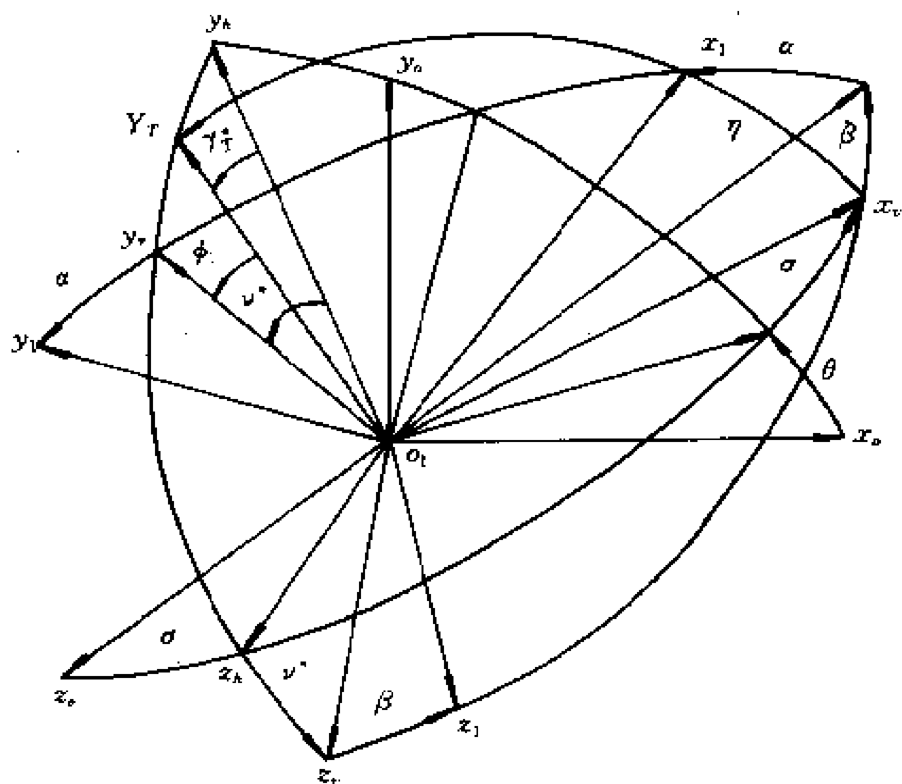


图6-58 γ_T^*、ν^*与ϕ_1的关系图

γ_T^*是制导要求总升力在oy_h上的投影，但目前执行坐标系，滚动通道是沿x_2轴的转角γ_2^*，为此应找出γ_2^*与γ_T^*之间的关系。

首先找γ_T^*与ν^*之间的关系，由图6-58知

$$\nu^* = \gamma_T^* + \phi_1 \tag{6-8-13}$$

且

$$\phi_1 = \mathrm{arctg}(-Z/Y) = \mathrm{arctg}(\sin\beta'/\mathrm{tg}\alpha')$$

故

$$\nu^* = \gamma_T^* + \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\beta'}{\mathrm{tg}\alpha'}\right) \tag{6-8-14}$$

再找 ν^* 和 γ_2^* 的关系，因为 ν 是导引所要求值，故应加上标为 ν^*.

当 θ'、σ'、ν^* 已知，且 α'、β' 也已知，则对应的需要的姿态角 φ^*、ψ^*、γ^* 就可以求出。但因为执行坐标系为 $o_1-x_2y_2z_2$，则对应的 $\alpha'_2=\alpha'+\alpha_n$，姿态角为 φ_2^*、ψ_2^*、γ_2^*，其中 φ_2^*、ψ_2^* 在导航计算中不需要，仅需求出 γ_2^*. 为此利用如下矩阵关系：

$$\begin{bmatrix} o_1x_2 \\ o_1y_2 \\ o_1z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B2_O}(\varphi_2^*,\psi_2^*,\gamma_2^*)\begin{bmatrix} o_1x_0 \\ o_1y_0 \\ o_1z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha'_2\cos\beta' & \sin\alpha'_2 & -\cos\alpha'_2\sin\beta' \\ -\sin\alpha'_2\cos\beta' & \cos\alpha'_2 & \sin\alpha'_2\sin\beta' \\ \sin\beta' & 0 & \cos\beta' \end{bmatrix} \boldsymbol{V_O}(\theta',\sigma',\nu^*)\begin{bmatrix} o_1x_0 \\ o_1y_0 \\ o_1z_0 \end{bmatrix}$$

可以得

$$\cos\psi_2^*\sin\gamma_2^* = -\sin\alpha'_2\cos\beta'(-\sin\sigma') + \cos\alpha'_2\cos\sigma'\sin\nu^* + \sin\alpha'_2\sin\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*$$

$$\cos\psi_2^*\cos\gamma_2^* = -\sin\beta'\sin\sigma' + \cos\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*$$

即

$$\mathrm{tg}\gamma_2^* = (\sin\alpha'_2\cos\beta'\sin\sigma' + \cos\alpha'_2\cos\sigma'\sin\nu^* + \sin\alpha'_2\cdot\sin\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*)/(-\sin\beta'\sin\sigma' + \cos\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*) \quad (6\text{-}8\text{-}15)$$

剩下的便是已知 φ'、ψ'、γ' 如何计算出相对于 $o_1-x_2y_2z_2$ 的 γ_2 了。利用坐标系之间的转换阵

$$\boldsymbol{B2_O}(\varphi'_2,\psi'_2,\gamma'_2) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{B_O}(\varphi',\psi',\gamma')$$

的关系，可以得

$$\left.\begin{aligned}\sin\gamma_2 &= \frac{1}{\cos\psi_2'}(\sin\alpha_n\sin\psi' + \cos\alpha_n\cos\psi'\sin\gamma) \\ \cos\gamma_2 &= \frac{1}{\cos\psi_2'}(\cos\psi'\cos\gamma) \\ \mathrm{tg}\gamma_2 &= \frac{\sin\alpha_n\sin\psi' + \cos\alpha_n\cos\psi'\sin\gamma}{\cos\psi'\cos\gamma}\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}8\text{-}16)$$

§6.8.3 返回再入段(有风和惯性器件误差)六自由度轨道仿真的数学模型

本模型要适用于制动段、过渡段和再入段，所以有些项在某些阶段应取为零。

1. *六自由度轨道仿真的动力学方程*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_B \begin{bmatrix} \dot{W}_{x1} \\ \dot{W}_{y1} \\ \dot{W}_{z1} \end{bmatrix} + g_r'/r \begin{bmatrix} x \\ y + R_o \\ z \end{bmatrix} + g_{\omega e}/\omega_e \begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y + R_o \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_{x1} \\ \dot{W}_{y1} \\ \dot{W}_{z1} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} P_{x1} + R_{x1} + F_{cx1} \\ P_{y1} + R_{y1} + F_{cy1} \\ P_{z1} + R_{z1} + F_{cz1} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}19)$$

$$\begin{bmatrix} d\omega_{x1}/dt \\ d\omega_{y1}/dt \\ d\omega_{z1}/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}20)$$

而 $\boldsymbol{\omega}_{1r} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_e$

$$\begin{bmatrix} \omega_{x1r} \\ \omega_{y1r} \\ \omega_{z1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{ex1} \\ \omega_{ey1} \\ \omega_{ez1} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}21)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{ex1} \\ \omega_{ey1} \\ \omega_{ez1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_o\boldsymbol{O}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}22)$$

当已知 ω_{x1r}、ω_{y1r}和 ω_{z1r}时可用四元数方法确定其欧拉角 φ、ψ、γ.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{x1r} & -\omega_{y1r} & -\omega_{z1r} \\ \omega_{x1r} & 0 & \omega_{z1r} & -\omega_{y1r} \\ \omega_{y1r} & -\omega_{z1r} & 0 & \omega_{x1r} \\ \omega_{z1r} & \omega_{y1r} & -\omega_{x1r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}23)$$

且 q_0、q_1、q_2和 q_3的初值由下式决定：

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} (\cos\varphi/2)(\cos\psi/2)(\cos\gamma/2) + (\sin\varphi/2)(\sin\psi/2)(\sin\gamma/2) \\ (\cos\varphi/2)(\cos\psi/2)(\sin\gamma/2) - (\sin\varphi/2)(\sin\psi/2)(\cos\gamma/2) \\ (\cos\varphi/2)(\sin\psi/2)(\cos\gamma/2) + (\sin\varphi/2)(\cos\psi/2)(\sin\gamma/2) \\ (-\cos\varphi/2)(\sin\psi/2)(\sin\gamma/2) + (\sin\varphi/2)(\cos\psi/2)(\cos\gamma/2) \end{bmatrix}_{t=0} \quad (6\text{-}8\text{-}24)$$

当已知 q_0、q_1、q_2和 q_3时可用下式决定欧拉角 φ、ψ 和 γ：

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}\varphi &= \frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\
\sin\psi &= 2(q_0q_2 - q_1q_3) \\
\mathrm{tg}\gamma &= \frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-25}$$

对两舱转动方程投影到第一船体坐标系，其转动惯量也为第一船体坐标系的量。对返回舱，其转动方程投影到第二船体坐标系，转动惯量也是对第二体坐标系而言的。

$$\begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} \tag{6-8-26}$$

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{O}}(\varphi,\psi,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{B2}_{\boldsymbol{O}}(\varphi_2,\psi_2,\gamma_2) \tag{6-8-27}$$

2. 有关参数的计算

考虑有风时气动力 R_{x1}、R_{y1}、R_{z1} 的计算（制动段，过渡段气动力因 $\rho=0, R_{x1}=R_{y1}=R_{z1}=0$）

$$\begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_A(\bar{\eta},\bar{M})\bar{q}S \\ C_N(\bar{\eta},\bar{M})(\sin\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}/\sin\bar{\eta})\bar{q}S \\ -C_N(\bar{\eta},\bar{M})(\sin\bar{\beta}/\sin\bar{\eta})\bar{q}S \end{bmatrix} \tag{6-8-28}$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{q} &= 1/2\rho U^2 \\
U &= (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)^{1/2} \\
\overline{M} &= U/a \\
\mathrm{tg}\bar{\alpha} &= -U_{y1}/U_{x1} \\
\sin\bar{\beta} &= U_{z1}/U \\
\cos\bar{\eta} &= \cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-29}$$

$$\begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{z1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B_O}\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B_O}\begin{bmatrix} v_x - W_x \\ v_y - W_y \\ v_z - W_z \end{bmatrix} \tag{6-8-30}$$

其中 W_x、W_y、W_z 为风在返回坐标系的分量。

设风矢量为 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{W}$ 在当地水平面内垂直地心矢，$\boldsymbol{W}$ 可用风速大小 V_W 和夹角 A_W 来描述，A_W 是指风向与当地正北方向的夹角，顺时针方向为正。

风在当地北天东坐标系的分量(W_{xT},W_{yT},W_{zT})为

$$\begin{bmatrix} W_{xT} \\ W_{yT} \\ W_{zT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_W\cos A_W \\ 0 \\ V_W\sin A_W \end{bmatrix} \tag{6-8-31}$$

风在当地地心系 O_E-XYZ 的三分量为

$$\begin{bmatrix} W_{xE} \\ W_{yE} \\ W_{zE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_W\cos A_W \\ 0 \\ V_W\sin A_W \end{bmatrix} \tag{6-8-32}$$

ϕ 为当地地心纬度。

于是风 $\boldsymbol{W}$ 在返回坐标系的分量 W_x、W_y、W_z 为

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{O_E}\begin{bmatrix} \cos(\lambda-\lambda_0) & -\sin(\lambda-\lambda_0) & 0 \\ \sin(\lambda-\lambda_0) & \cos(\lambda-\lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{xE} \\ W_{yE} \\ W_{zE} \end{bmatrix} \tag{6-8-33}$$

λ 为当地经度，λ_0 为制动点的经度。

d_1、d_2、d_3的计算

对返回舱单舱第二体坐标系而言

$$\begin{cases} d_1 = M_{x2R} + M_{x2d} + M_{xc} + M_{x2f} - I_{xy}\omega_{x2}\omega_{z2} \\ \quad - I_{yz}(\omega_{z2}^2 - \omega_{y2}^2) + I_{zx}\omega_{x2}\omega_{y2} - (I_z - I_y)\omega_{z2}\omega_{y2} \\ d_2 = M_{y2R} + M_{y2d} + M_{yc} + M_{y2f} - I_{yz}\omega_{x2}\omega_{y2} \\ \quad - I_{zx}(\omega_{x2}^2 - \omega_{z2}^2) + I_{xy}\omega_{y2}\omega_{z2} - (I_x - I_z)\omega_{x2}\omega_{z2} \\ d_3 = M_{z2R} + M_{z2d} + M_{zc} + M_{z2f} - I_{zx}\omega_{y2}\omega_{z2} \\ \quad - I_{xy}(\omega_{y2}^2 - \omega_{x2}^2) + I_{yz}\omega_{x2}\omega_{z2} - (I_y - I_x)\omega_{x2}\omega_{y2} \end{cases} \tag{6-8-34}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2R} \\ M_{y2R} \\ M_{z2R} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B2_B} \begin{bmatrix} C_N\bar{q}S\delta\sin\bar{\beta}/\sin\bar{\eta} \\ (C_A\delta/l + C_{mg})(\sin\bar{\beta}/\sin\bar{\eta})\bar{q}Sl \\ -C_A\bar{q}S\delta + (C_A\delta/l + C_{mg})(\sin\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}/\sin\bar{\eta})\bar{q}Sl \end{bmatrix} \tag{6-8-35}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2d} \\ M_{y2d} \\ M_{z2d} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B2_B} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x1r} \\ \omega_{y1r} \\ \omega_{z1r} \end{bmatrix} \bar{q}Sl^2/U \tag{6-8-36}$$

M_{xc}、M_{yc}、M_{zc}的计算见式(6-8-9)、(6-8-10)和(6-8-11)

对返回舱加推进舱的两舱而言，d_1、d_2、d_3的计算比较简单，因在大气层外 $\rho=0$，故 $M_R=M_d=M_f=0$。

$$d_1 = M_{xc} - I_{xy}\omega_{x1}\omega_{z1} - I_{yz}(\omega_{z1}^2 - \omega_{y1}^2) + I_{zx}\omega_{x1}\omega_{y1} - (I_z - I_y)\omega_{z1}\omega_{y1}$$

$$
\left.\begin{aligned}
d_2 &= M_{yc} - I_{yz}\omega_{z1}\omega_{y1} - I_{xz}(\omega_{z1}^2 - \omega_{x1}^2) \\
&\quad + I_{xy}\omega_{y1}\omega_{x1} - (I_x - I_z)\omega_{z1}\omega_{x1} \\
d_3 &= M_{zc} - I_{xz}\omega_{y1}\omega_{z1} - I_{xy}(\omega_{y1}^2 - \omega_{x1}^2) \\
&\quad + I_{yz}\omega_{x1}\omega_{z1} - (I_y - I_x)\omega_{x1}\omega_{y1}
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}8\text{-}37)
$$

其中 M_{xc}、M_{yc}、M_{zc}的计算与姿态控制系统设计有关，设此时姿态控制系统均采用运行段姿态控制系统，其示意图如图6-52，以 M_{xc}为例，可用下式计算：

$$
M_{xc} = \begin{cases}
L_x \operatorname{sign}(\Delta_x) & \text{当 } |\Delta_x| \geqslant \theta_D \\
0 & \text{当 } |\Delta_x| < \theta_D(1-h) \\
M_{xc}(t_{k-1}) & \text{当 } \theta_D(1-h) < |\Delta_x| \leqslant \theta_D \\
0 & \text{当 } t = 0
\end{cases}
$$

(6-8-38)

而

$$
\begin{aligned}
\Delta_x &= \varphi^* - \varphi' + K(\dot{\varphi}^* - \dot{\varphi}') \\
&= \varphi^* - \varphi' + K\Delta\dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

类似有 M_{yc}、M_{zc}的计算。

计算 M_{yc}用 ψ^* 代替 φ^*，ψ' 代替 φ'，计算 M_{zc}用 γ^* 代替 φ^*，γ' 代替 φ'. 此外力矩的大小不一样，要对 L_x 进行变换。

$$
\left.\begin{aligned}
g_r' &= -\frac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\phi)\right] \\
g_{\omega e} &= -2\frac{fM}{r^2}J\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\sin\phi
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}8\text{-}39)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \omega_{ex}^2 - \omega_e^2 \\
a_{12} &= a_{21} = \omega_{ex}\omega_{ey} \\
a_{22} &= \omega_{ey}^2 - \omega_e^2 \\
a_{23} &= a_{32} = \omega_{ez}\omega_{ey} \\
a_{13} &= a_{31} = \omega_{ex}\omega_{ez} \\
a_{33} &= \omega_{ez}^2 - \omega_e^2
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-40}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
b_{11} &= b_{22} = b_{33} = 0 \\
b_{12} &= - b_{21} = - 2\omega_{ez} \\
b_{31} &= - b_{13} = - 2\omega_{ey} \\
b_{23} &= - b_{32} = - 2\omega_{ex}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-41}
$$

$$
r = [x^2 + (y + R_0)^2 + z^2]^{1/2}
$$

当地速度倾角：

$$
\Theta = \arcsin\{[xv_x + (R_0 + y)v_y + zv_z]/(rv)\} \tag{6-8-42}
$$

对返回坐标系的速度倾角、航迹偏航角：

$$
\left.\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{arctg}(v_y/v_x) \\
\sigma &= \arcsin(- v_z/v)
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-43}
$$

当已知 θ、σ、φ、ψ、γ，可以求出 α、β 及 ν：

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\beta =& \sin\psi\cos\gamma\cos\sigma\cos(\varphi - \theta) + \\
& \sin\gamma\cos\sigma\sin(\varphi - \theta) - \cos\psi\cos\gamma\sin\sigma \\
\cos\beta =& (1 - \sin^2\beta)^{1/2} \\
& -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-44}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\alpha =& - (1/\cos\beta)[\sin\psi\sin\gamma\cos\sigma\cos(\varphi - \theta) \\
& - \cos\gamma\cos\sigma\sin(\varphi - \theta) - \cos\psi\sin\gamma\sin\sigma] \\
\cos\alpha =& (1/\cos\beta)[\cos\psi\cos\sigma\cos(\varphi - \theta) + \sin\psi\sin\sigma]
\end{aligned}\right\}
$$

$$
-\pi \leqslant \alpha < \pi \tag{6-8-45}
$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\nu &= (1/\cos\beta)[\sin\gamma\cos(\varphi-\theta) - \sin\psi\cos\gamma\sin(\varphi-\theta)] \\ \cos\nu &= (1/\cos\beta)[\sin\psi\cos\gamma\cos(\varphi-\theta)\sin\sigma \\ &\quad - \sin\gamma\sin\sigma\sin(\varphi-\theta) + \cos\psi\cos\gamma\cos\sigma]\end{aligned}\right\}$$

$$-\pi \leqslant \nu < \pi \qquad (6\text{-}8\text{-}46)$$

地心纬度

$$\begin{aligned}\phi &= \arcsin[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}_e)/(r\omega_e)] \\ &= \arcsin\left(\frac{x\omega_{ex} + (R_0+y)\omega_{ey} + z\omega_{ez}}{r\omega_e}\right)\end{aligned} \qquad (6\text{-}8\text{-}47)$$

经度

$$\lambda = \mathrm{arctg}(Y/X) + \lambda_0 \qquad (6\text{-}8\text{-}48)$$

λ_0为制动点的经度

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_O\begin{bmatrix}x\\y+R_0\\z\end{bmatrix}$$

E_O 为返回坐标系到地心坐标系的方向余弦阵。

给出ϕ与r，可迭代求出星下点的大地纬度B、地心距R_e、地心纬度ϕ_e及高度h

$$\left.\begin{aligned}B &= \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\phi_e/e^2) \\ R_e &= \frac{a_e}{\sqrt{\sin^2\phi_e + e^2\cos^2\phi_e}} \\ h &= [r^2 - R_e^2\sin^2(B-\phi_e)]^{1/2} - R_e\cos(B-\phi_e) \\ \Delta\phi_e &= \arcsin[h\sin(B-\phi_e)/r] \\ \phi_e &= \phi - \Delta\phi_e\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}8\text{-}49)$$

其中，$e=0.997$，$a_e=6378140\text{m}$，令迭代初值$\phi_{e0}=\phi$。

3. 制导方程的计算

(1)阻尼陀螺仪敏感到的 ω'_{x1}、ω'_{y1}、ω'_{z1} 及 ω'_{x2}、ω'_{y2}、ω'_{z2} 的计算从制动段到两舱分离是在第一体坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 列写运动方程，而在只有返回舱时是在第二体坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 列写方程，所以要对测量信息进行换算，即

$$\begin{pmatrix} \omega'_{x2} \\ \omega'_{y2} \\ \omega'_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_{x1} \\ \omega'_{y1} \\ \omega'_{z1} \end{pmatrix} \tag{6-8-50}$$

在仿真计算中，阻尼陀螺仪的误差模型为

$$\begin{cases} \omega'_{x1} = (1 + k_{g2x})(\omega_{x1} + k_{g0x} + k_{g11x}\dot{W}_{x1} + k_{g12x}\dot{W}_{y1} + k_{g13x}\dot{W}_{z1} + k_{g3x}) \\ \omega'_{y1} = (1 + k_{g2y})(\omega_{y1} + k_{g0y} + k_{g11y}\dot{W}_{x1} + k_{g12y}\dot{W}_{y1} + k_{g13y}\dot{W}_{z1} + k_{g3y}) \\ \omega'_{z1} = (1 + k_{g2z})(\omega_{z1} + k_{g0z} + k_{g11z}\dot{W}_{x1} + k_{g12z}\dot{W}_{y1} + k_{g13z}\dot{W}_{z1} + k_{g3z}) \end{cases} \tag{6-8-51}$$

而在进入到100km 之前要进行一次利用星敏感器完成飞船的精确测定。在仿真计算中可以重新确定姿态角初值(考虑星敏感器的精度)进行仿真计算。

(2)加速度表敏感到的 $\dot{W}'_{x1}$、$\dot{W}'_{y1}$、$\dot{W}'_{z1}$ 的计算

加速度表沿 $o_1-x_1y_1z_1$ 轴系安装。在仿真计算中可取如下模型。

$$\begin{pmatrix} \dot{W}'_{x1} \\ \dot{W}'_{y1} \\ \dot{W}'_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + k_{a1x})(\dot{W}_{x1} + k_{a0x}) \\ (1 + k_{a1y})(\dot{W}_{y1} + k_{a0y}) \\ (1 + k_{a1z})(\dot{W}_{z1} + k_{a0z}) \end{pmatrix} \tag{6-8-52}$$

在返回制动前，用 GPS 或地面站精确测轨，所以误差是以 GPS 的测轨精度来确定。

在滑行段用 GPS 或地面站进行一次轨道参数校正，所以仿真计算中在某一高度(形成配平攻角的高度)，用 GPS 的测轨精度再

进行一次速度和位置的校正。

(3)制导方程

纵向制导中 γ_T 大小由下式计算：

$$\gamma_{T0} = \arccos\left[\frac{(L/D)K_0 + \Delta(L/D)}{(L/D)}\right] \tag{6-8-53}$$

其中 $K_0=\cos\nu_0$，$\nu_0(t)$ 由标准轨道给出。

$$\Delta(L/D) = K_1\Delta n_x + K_2\Delta\dot{h} + K_3\Delta R + K_4\Delta\dot{R} \tag{6-8-54}$$

其中 K_1、K_2、K_3、K_4 由纵向制导规律确定，是已知值。

而
$$\Delta n_x = n_x' - n_{x0}, \quad \Delta\dot{h} = \dot{h}' - \dot{h}_0$$

$$\Delta R = R' - R_0, \qquad \Delta\dot{R} = \dot{R}' - \dot{R}_0$$

n_x'、$\dot{h}'$、R'、$\dot{R}'$ 分别为飞船导航计算出来的切向过载、爬高率、纵程和纵程变化率，n_{x0}、$\dot{h}_0$、R_0、$\dot{R}_0$ 为相应的标准值。

侧向制导决定 γ_T 的符号。

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_T = -|\gamma_{TO}| && \text{当 } Z' + K_5\dot{Z}' \geqslant \bar{Z} \\
&\gamma_T = |\gamma_{TO}| && \text{当 } Z' + K_5\dot{Z}' \leqslant -\bar{Z} \\
&\gamma_T = |\gamma_{TO}|\operatorname{sign}[\gamma_T(t_{i-1})] && \text{当 } |Z' + K_5\dot{Z}'| < \bar{Z}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8-55}$$

且 $\gamma_T(0)$ 为开始制导时的值

$$\bar{Z} = C_1 + C_2(v'/v_e)$$
$$K_5 = C_3 + C_4(v'/v_e)$$

其中：Z'、$\dot{Z}'$、v' 由导航计算给出，$\bar{Z}$、C_1、C_2、C_3、C_4 由标准轨道给出。

γ_T 是导航计算出来的要求值，此值就是 γ_T^*.

(4) 输入量 φ^*，ψ^* 和 γ^* 的计算

前已叙述，从制动到 $n_{x1} = 0.04g$，姿态控制系统属于姿态跟

踪和稳定系统，其输入量应由导航计算给出，所以输入量φ^*、ψ^*和γ^*的计算均以导航计算为基础进行。

a). 从制动到两舱分离高度$h=135\text{km}$，φ^*、ψ^*和γ^*的计算

$$\left.\begin{aligned}-\sin\psi^* &= C_{31}\cos\varphi_A + C_{32}\sin\varphi_A\\ \mathrm{tg}\gamma^* &= (-C_{31}\sin\varphi_A + C_{32}\cos\varphi_A)/C_{33}\\ \mathrm{tg}\varphi^* &= (C_{21}\cos\varphi_A + C_{22}\sin\varphi_A)/(C_{11}\cos\varphi_A + C_{12}\sin\varphi_A)\end{aligned}\right\} \tag{6-8-56}$$

其中$\varphi_A=15^\circ$，C_{ij}是$\boldsymbol{O}_A$方向余弦阵的元素。

$$\boldsymbol{O}_A=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_0^T\begin{bmatrix}\cos\omega_eT & \sin\omega_eT & 0\\ -\sin\omega_eT & \cos\omega_eT & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_0 \tag{6-8-57}$$

其中$\boldsymbol{E}_0$当返回制动点确定时为常数矩阵，故$\boldsymbol{O}_A$仅随从制动时刻计算的时间T而变化，ω_e为地球自转角速度。

b) 从两舱分离到达到配平状态时φ^*、ψ^*和γ^*的计算公式同式(6-8-56)，但

$$\varphi_A=\varphi_{A_0}+\dot{\varphi}t_p,\qquad \varphi_{A_0}=15^\circ,\qquad \dot{\varphi}=4^\circ/s,$$

t_p为分离后从$h=135\text{km}$开始计算的时间，且当$\varphi_T^*=-22^\circ$时转入新的计算，φ_T^*的计算公式如下：

$$\varphi_T^*=\arcsin\frac{x'\cos\varphi'\cos\psi'+(y'+R_0)\sin\varphi'\cos\psi'-z'\sin\psi'}{[x'^2+(y'+R_0)^2+z'^2]^{1/2}} \tag{6-8-58}$$

c) 从形成配平状态到$n_{x1}=0.04g$时的φ^*、ψ^*和γ^*的计算

设形成配平状态$\alpha_{tr}=-20^\circ$，且认为$\beta=0$，$\nu=0$，则

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi^* &= \cos\alpha_{tr}\sin\sigma'\\ \sin\varphi^* &= (1/\cos\psi^*)[\cos\alpha_{tr}\sin\theta'\cos\sigma'+\sin\alpha_{tr}\cos\theta']\\ \cos\varphi^* &= (1/\cos\psi^*)[\cos\alpha_{tr}\cos\theta'\cos\sigma'-\sin\alpha_{tr}\sin\theta']\\ \sin\gamma^* &= \sin\alpha_{tr}\sin\sigma'/\cos\psi^*\\ \cos\gamma^* &= \cos\sigma'/\cos\psi^*\end{aligned}\right\} \tag{6-8-59}$$

其中 σ'，θ' 为导航计算值。

以上 b)和 c)的讨论是认为推进舱和返回舱分离后，返回舱单舱时其姿态控制仍在返回舱坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 进行时的情况。实际上推进舱和返回舱分离后，返回舱单舱时其姿态控制系统多在第二返回舱坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 进行，此时相应的输入量 φ^*、ψ^*、γ^* 应改成 φ_2^*、ψ_2^*、γ_2^*，而输出量 φ'、ψ'、γ' 应改成 φ_2'、ψ_2'、γ_2'。此时的姿态控制系统也不一定要与两舱的姿态控制系统一样，可以根据需要重新进行选择。

d) 从 $n_{x1}=0.04g$ 到开伞前 γ_2^*、γ_2' 的计算

从 $n_{x1}=0.04g$ 开始，俯仰、偏航通道为角速率稳定系统，其 ω_{y2}^*、ω_{z2}^* 为零，仅需计算 γ_2^* 的大小。

$$\nu^* = \gamma_T^* + \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\beta'}{\mathrm{tg}\alpha'}\right) \tag{6-8-60}$$

γ_T^* 的计算由制导方程决定，β'、α' 由导航计算给出。当已知 ν^* 时，则 γ_2^* 可由下式计算。

$$\gamma_2^* = \mathrm{arctg}\frac{\sin\alpha_2'\cos\beta'\sin\sigma' + \cos\alpha_2'\cos\sigma'\sin\nu^* + \sin\alpha_2'\sin\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*}{-\sin\beta'\sin\sigma' + \cos\beta'\cos\sigma'\cos\nu^*} \tag{6-8-61}$$

其中，$\alpha_2'=\alpha'+\alpha_n$

又因执行坐标系为第二返回舱坐标系，所以当已知 γ' 时，需计算 γ_2'，它可由下式计算

$$\mathrm{tg}\gamma_2' = \frac{\sin\alpha_n\sin\psi' + \cos\alpha_n\cos\psi'\sin\gamma'}{\cos\psi'\cos\gamma'} \tag{6-8-62}$$

4. 导航计算

为了求出制导所需的姿态角、位置和速度，需要利用加速度表和阻尼陀螺仪的信息求出飞船的姿态角和位置信息，因为牵涉到

导航坐标系的选取问题，下面以返回坐标系为导航计算系进行讨论。

前面已假定仿真计算是在返回坐标系，现导航计算也取返回坐标系，即二者是统一的，不同的是导航计算时的视加速度，绝对角速度均取测量值即上标带“′”的值。

$$\begin{bmatrix} dv'_x/dt \\ dv'_y/dt \\ dv'_z/dt \end{bmatrix} = B_O^T(\varphi',\psi',\gamma')\begin{bmatrix} \dot{W}'_{x1} \\ \dot{W}'_{y1} \\ \dot{W}'_{z1} \end{bmatrix} + g'_r/r'\begin{bmatrix} x' \\ R_0 + y' \\ z' \end{bmatrix} - g'_{\omega e}/\omega_e\begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ R_0 - y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}63)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}64)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}'_0 \\ \dot{q}'_1 \\ \dot{q}'_2 \\ \dot{q}'_3 \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} 0 & -\omega'_{x1r} & -\omega'_{y1r} & -\omega'_{z1r} \\ \omega'_{x1r} & 0 & \omega'_{z1r} & -\omega'_{y1r} \\ \omega'_{y1r} & -\omega'_{z1r} & 0 & \omega'_{x1r} \\ \omega'_{z1r} & \omega'_{y1r} & -\omega'_{x1r} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}65)$$

$$\begin{bmatrix} \omega'_{x1r} \\ \omega'_{y1r} \\ \omega'_{z1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_{x1} - \omega'_{ex1} \\ \omega'_{y1} - \omega'_{ey1} \\ \omega'_{z1} - \omega'_{ez1} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}66)$$

$$\begin{bmatrix} \omega'_{ex1} \\ \omega'_{ey1} \\ \omega'_{ez1} \end{bmatrix} = B'_0 O_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \tag{6-8-67}$$

q'_0, q'_1, q'_2, q'_3的初值由下式决定：

$$\begin{bmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} (\cos\varphi'/2)(\cos\psi'/2)(\cos\gamma'/2) + (\sin\varphi'/2)(\sin\psi'/2)(\sin\gamma'/2) \\ (\cos\varphi'/2)(\cos\psi'/2)(\sin\gamma'/2) - (\sin\varphi'/2)(\sin\psi'/2)(\cos\gamma'/2) \\ (\cos\varphi'/2)(\sin\psi'/2)(\cos\gamma'/2) + (\sin\varphi'/2)(\cos\psi'/2)(\sin\gamma'/2) \\ (-\cos\varphi'/2)(\sin\psi'/2)(\sin\gamma'/2) + (\sin\varphi'/2)(\cos\psi'/2)(\cos\gamma'/2) \end{bmatrix}_{t=0} \tag{6-8-68}$$

其中 φ'_0、ψ'_0和 γ'_0是制动时刻俯仰角、偏航角、滚动角的初值。

当计算出 q'_0、q'_1、q'_2和 q'_3，则 φ'、ψ'和 γ'可以由下式计算：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\varphi' &= \frac{2(q'_1q'_2 + q'_0q'_3)}{q'^2_1 + q'^2_1 - q'^2_2 - q'^2_3} \\ \sin\psi' &= 2(q'_0q'_2 - q'_1q'_3) \\ \mathrm{tg}\gamma' &= \frac{2(q'_2q'_3 + q'_0q'_1)}{q'^2_0 + q'^2_3 - q'^2_1 - q'^2_2} \end{aligned}\right\} \tag{6-8-69}$$

注意以上的姿态角计算，当两舱分离后转为仅有返回舱时要进行变换。仿真计算用的转动方程建立在第二船体坐标系，得到的是 ω'_{y2}、ω'_{z2}、ω'_{x2}，应将其换算到第一船体坐标系，得到 ω'_{y1}、ω'_{z1}、ω'_{x1}，即

$$\begin{bmatrix} \omega'_{x1} \\ \omega'_{y1} \\ \omega'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_{x2} \\ \omega'_{y2} \\ \omega'_{z2} \end{bmatrix} \tag{6-8-70}$$

$$\left.\begin{aligned} g'_r &= -fM/r'^2[1 + J(a_e/r')^2(1 - 5\sin^2\phi')] \\ g'_{\omega e} &= -2fM/r'^2 J(a_e/r')^2\sin\phi' \\ r' &= [x'^2 + (R_0 + y')^2 + z'^2]^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}8\text{-}71)$$

当已知四元数时，求方向余弦阵，可直接用四元数求出：

$$B_O(q_0,q_1,q_2,q_3) =$$

$$\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}8\text{-}72)$$

但 q_0、q_1、q_2、q_3是测量计算值，则 B_O 加上标成为 B'_O。

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta' &= \frac{v'_y}{\sqrt{v'^2_x + v'^2_y}} \\ \cos\theta' &= \frac{v'_x}{\sqrt{v'^2_x + v'^2_y}} \end{aligned}\right\} \quad -\pi < \theta' \leqslant \pi \quad (6\text{-}8\text{-}73)$$

$$\sin\sigma' = -\frac{v'_z}{v'} = -\frac{v'_z}{\sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}}$$

$$-\pi/2 \leqslant \sigma' \leqslant \pi/2 \quad (6\text{-}8\text{-}74)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta' &= \sin\psi'\cos\gamma'\cos\sigma'\cos(\varphi' - \theta') \\ &\quad + \sin\gamma'\cos\sigma'\sin(\varphi' - \theta') - \cos\psi'\cos\gamma'\sin\sigma' \\ \cos\beta' &= (1 - \sin^2\beta')^{1/2} \end{aligned}\right\}$$

$$-\pi/2 \leqslant \beta' \leqslant \pi/2 \quad (6\text{-}8\text{-}75)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha' &= -1/\cos\beta'[\sin\psi'\sin\gamma'\cos\sigma'\cos(\varphi' - \theta') \\ &\quad - \cos\gamma'\cos\sigma'\sin(\varphi' - \theta') - \cos\psi'\sin\gamma'\sin\sigma'] \\ \cos\alpha' &= 1/\cos\beta'[\cos\psi'\cos\sigma'\cos(\varphi' - \theta') + \sin\psi'\sin\sigma'] \end{aligned}\right\}$$

$$-\pi \leqslant \alpha' \leqslant \pi \quad (6\text{-}8\text{-}76)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\nu' &= 1/\cos\beta'[\sin\gamma'\cos(\varphi'-\theta') \\ &\quad -\sin\psi'\cos\gamma'\sin(\varphi'-\theta')] \\ \cos\nu' &= 1/\cos\beta'[\sin\psi'\cos\gamma'\cos(\varphi'-\theta')\sin\sigma' \\ &\quad +\sin\gamma'\sin\sigma'\sin(\varphi'-\theta')+\cos\psi'\cos\gamma'\cos\sigma']\end{aligned}\right\}$$

$$-\pi \leqslant \nu' \leqslant \pi \tag{6-8-77}$$

当已知位置(x',y',z')如何求经纬度、高度、纵程、横程，其求解方法同仿真计算一样，只是要求用测量值，即导航计算出来的值，这里不重复。

除了以返回坐标系为导航计算系外，还可以用返回惯性坐标系、地心惯性坐标系为导航计算系，其推导方法类似，这里不重复了。

5. *考虑启动和关闭延迟的控制力及控制力矩的计算*

前述的控制力矩计算，没考虑控制力大小的延迟，如果考虑喷咀产生的控制力有延迟，则控制力的大小为非恒值。根据资料，其简化推力延迟规律如下：

(1)返回舱姿态发动机推力特性分析

不失一般性，以滚动通道为例，返回舱其简化推力模型如图6-60示。

其中假设，从指令下达发动机工作到发动机开始工作延迟20ms，而指令下达发动机停止工作到发动机推力减小也需延迟20ms.

根据推力曲线可以得到如下结论：

由指令下达到推力最大值约为

$$\Delta t_1 = T_{90} + 1000/90 = 120 + 11.1 = 131.1\text{ms}$$

而发出关机指令到推力(推力矩)为零的时间约为

$$\Delta t_2 = T_{10} + 800/90 = 100 + 8.9 = 108.9\text{ms}$$

当指令要发动机工作时间为 T_N 秒，则发动机有推力的工作时间

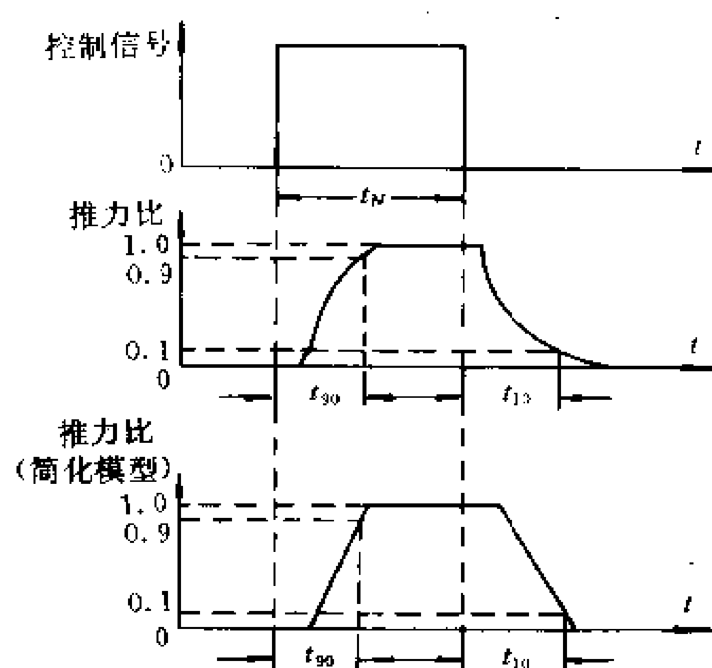


图6-59　发动推力特性曲线

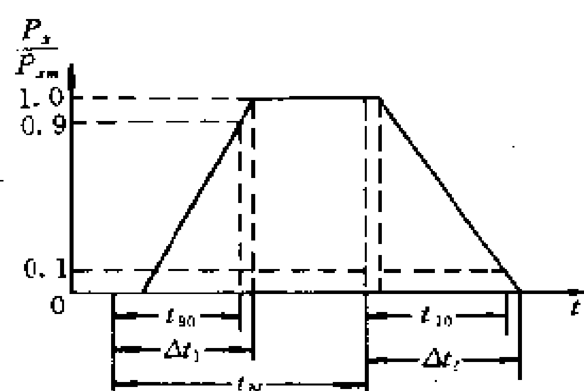


图6-60　简化的推力特性曲线

为

$$T'_N = T_N + 108.9(\mathrm{ms})$$

为了使推力达到最大值，指令发动机工作最小时间为

$$t_N = 120 + 1000/90 = 131.1\text{ms}$$

若发动机指令工作时间小于131.1ms，则推力达不到额定值。因此作如下假设：推力的下降速率与达到额定推力后下降速率相同，且认为燃料的消耗与推力的大小成正比。此时的推力特性如图6-61。此时，推力在上升过程中，控制指令要求发动机停止工作，令此刻推力为 P_{xs}，与推力最大值之比为 P_{xs}/P_{xm}，且认为有同样的延迟(20ms)。

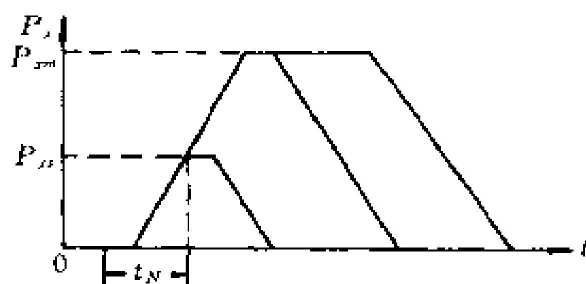


图6-61 推力达不到额定值时简化推力特性曲线

(2)考虑导航计算需要时间，制导指令步长为 ΔT 时推力(推力矩)的计算

由于导航计算需要时间，因此某一时刻 T 采样到的参数，并计算出的制导信号，要经过间隔 ΔT 后发出，因此 T 时刻执行的制导信号是由 $(T-\Delta T)$ 时刻采样到的参数经过计算得到的。

(3)考虑推力大小存在延迟时的推力(推力矩)的计算(以 P_x 为例进行说明)

根据推力特性曲线，设 t_i 为指令要求发动机工作时刻，t_j 为指令要求发动机停止工作时刻，则启动有延迟时的推力 P_{xs} 为

$$P_{xs} = \begin{cases} 0 & \text{当 } t - t_i \leqslant 0.02 \text{ 时} \\ 9P_{xm}(t - t_i - 0.02) & \text{当 } 0.131 \geqslant t - t_i > 0.02 \text{ 时} \\ P_{xm} & \text{当 } t - t_i > 0.131 \text{ 时} \end{cases} \tag{6-8-78}$$

其中，t 的单位为 s，而停止工作有延迟时的推力 P_{xe}

$$P_{xc}=\begin{cases}P_{xs} & \text{当 } t-t_j\leqslant 0.02 \text{ 时}\\ P_{xs}-(90/8)P_{xm}(t-t_j-0.02) & \\ & \text{当 } 0.0889P_{xs}/P_{xm}+0.02\geqslant t-t_j>0.02 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } t-t_j>0.0889P_{xs}/P_{xm}+0.02 \text{ 时}\end{cases}\tag{6-8-79}$$

从式(6-8-17)到式(6-8-79)集中写出了同时存在着风、惯性器件误差和推力有延迟时六自由度轨道仿真时所需的计算公式。利用上述公式给出初始条件，误差大小便可以进行六自由度轨道仿真了。

§6.8.4 飞船返回再入段六自由度的轨道计算及精度分析

飞船返回再入段六自由度轨道仿真因为①制动段、过渡段与再入段的姿态控制系统不相同②再入段要考虑气动力和气动热的问题，所以制动段和过渡段的六自由度轨道仿真与再入段的六自由度仿真是有区别的，比较而言再入段的六自由轨道仿真更重要一些，因为有大气的作用、涉及问题较多，是返回再入段重点要解决的问题。下面以再入段六自由度轨道计算和精度分析为例进行分析研究。

飞船再入段六自由度轨道仿真及精度分析是在其三自由度轨道设计及仿真计算基础上进行的更为全面、更接近实际情况的设计分析工作。因此，与三自由度轨道设计与仿真相比，六自由度轨道仿真既继承了三自由度的部分内容与其相联系，同时又有它自身的特点，显示了与三自由度的差别，返回舱再入段六自由度轨道仿真是更接近半实物仿真的动态过程。

1. 六自由度标准轨道设计与分析

所谓六自由度标准轨道是指无任何误差，但考虑了返回舱的转动运动、姿态控制系统及其产生推力的延迟性能的标准轨道。由

于在三自由轨道仿真时，是按配平状态给出了三自由度标准状态参数，为了进行六自由度的轨道仿真，因为有姿态运动，其标准轨道参数，例如 n_{y0}、h_0、R_0、$\dot{R}_0$等不同于三自由度的仿真时参数，因此在进行六自由度仿真时，首先要计算标准轨道，为此应给出计算标准轨道的初值。认为 v_x、v_y、v_z、x、y、z 可取三自由度仿真时的标准值。α、β 的初值可以取配平状态值。θ_0、σ_0可以由 v_x、v_y、v_z 的初值计算出来，ν_0可以认为等于三自由度的仿真值，即 $\nu_0=0$，因为飞船在再入时，当轴向过载 $n_{x1}\leqslant 0.04g_0$ 时，均要保持总升力 Y_T 在再入纵平面内，倾斜角 $\gamma_T=0$. 再利用八个欧拉角的关系，可以得到 φ_0、ψ_0、γ_0，且认为 ω_{x10}、ω_{y10}、ω_{z10}等于零。当然由此也就可以得到第二返回舱坐标系的姿态角 φ_{20}、ψ_{20}、γ_{20}以及姿态转动角速度在第二返回舱坐标系中各轴上的分量 ω_{x20}、ω_{y20}、ω_{z20}. 同时飞船再入时返回舱的质量 m_0也是已知的。到此为止，包括质心运动的动力学、运动学方程、绕质心转动的动力学和运动学方程，以及质量特性方程和时间变量的初值均给出来了。

六自由度标准轨道设计可以参考三自由度标准轨道设计方法，继承部分设计参数，但不能完全等同，因为完全采用三自由度标准轨道设计出来的 $\gamma_T^*(t)$的变化规律，而没有自己的侧向漏斗边界，这样设计出来的标准再入轨道在开伞点高度 h_f 处与标准开伞点的纵程差 ΔR_f 和横程差 ΔZ_f 差别都比较大。反过来六自由度标准轨道设计只吸收三自由度标准轨道设计中 γ_T^* 变化的绝对值，至于何时反号，由侧向漏斗边界决定。这时漏斗边界系数可以同三自由度仿真一样，这样设计出来的六自由度标准轨道效果较好，这是经过仿真计算得到的一点结论。

由于考虑了姿态控制系统和返回舱的转动运动，六自由度标准轨道的最大过载为3.06，与三自由度标准轨道稍有不同，但仍满足总体设计要求。

另外从仿真结果看出，再入段若采用三自由度再入标准轨道

设计的 $\gamma_T^*(t)$，而不用依据六自由度的侧向漏斗边界决定的 $\gamma_T^*(t)$，此时六自由度标准轨道飞到开伞点10km 时，相对标准开伞点的纵程和横程偏差竟分别达到3.6km 和5.5km.

2. *基于六自由度标准轨道的导航误差计算和分析*

导航误差是指由六自由度标准轨道提供的视加速度和飞船的转动角速度，再根据导航计算算出由于初始点测速误差、定位误差、定向误差以及惯性仪表误差，包括加速度表和阻尼陀螺仪的测量误差引起的落点纵程和横程偏差。精度计算可采用最大偏差法和蒙特卡洛随机抽样统计法。从最大偏差法的仿真结果看，在上述诸误差因素中，对导航误差精度影响较大的是再入点姿态角的定向精度、加速度表的零位误差精度、陀螺的零漂精度以及与 $\dot{W}_{x1}$ 有关的陀螺误差的精度。

3. *在无导航误差情况下制导方法的误差计算与分析*

主要研究飞船再入点初始状态参数偏差、气动系数偏差、结构参数偏差以及风、大气环境对落点精度的影响，以及分析选定的纵向和侧向制导规律是否合适，其制导精度是否满足要求。用单项最大偏差进行仿真，可以看出影响制导精度的因素主要是气动系数偏差、大气密度偏差以及初始位置偏差。

4. *GNC 系统工作时六自由度弹道仿真及精度分析*

实际上飞船的落点精度计算，既要考虑导航误差，也要考虑其它误差因素。同样仿真可以用最大偏差法和蒙特卡洛方法进行分析。

用最大偏差法对某载人飞船进行了六自由度轨道仿真计算得到如下结果：

10km 开伞处导航误差：

纵程偏差(3σ)　　4.35km

横程偏差(3σ)　　2.73km

航程偏差(3σ) 5.14km

10km 开伞处总的落点偏差：

纵程偏差(3σ) 7.66km

横程偏差(3σ) 6.50km

航程偏差(3σ) 10.05km

用蒙特卡洛法抽样200条轨道得到的结果：

纵程偏差(3σ) 4.83km

横程偏差(3σ) 5.22km

航程偏差(3σ) 7.11km

图6-62画出了再入飞行过程中滚动角γ_2与要求的总升力的倾侧角γ_T^*的变化规律，二者很接近，说明滚动角γ_2能很好的跟上γ_T^*的变化。图6-63画出了总攻角的变化规律，最后稳定在配平攻角状态。

从仿真结果可以看出：①采用第二返回舱坐标系$o_1-x_2y_2z_2$的优点是明显的，因为实际飞行中侧滑角β很小$\gamma_T^*\approx\nu^*\approx\gamma_2^*$，完全可用$\gamma_T^*$代替$\gamma_2^*$②除导航误差外，主要影响落点精度的是气动系数偏差和大气密度偏差。落点偏差的大小与气动系数和大气密度偏差的取值有密切的关系。气动系数偏差超过某一范围其落点偏差相差很多。目前气动系数的偏差由于理论计算和实验条件的限制，提高其准确度有一定的困难。所以载人飞船落点精度的提高受到了限制。③从仿真结果看，所选择的姿态控制系统方案，设计合理、参数正确；提出的纵向和侧向制导规律是合理的、可行的。

§6.9 航天飞机轨道器返回轨道设计和再入制导方法

航天飞机返回再入到地球的部分，称轨道飞行器，简称轨道

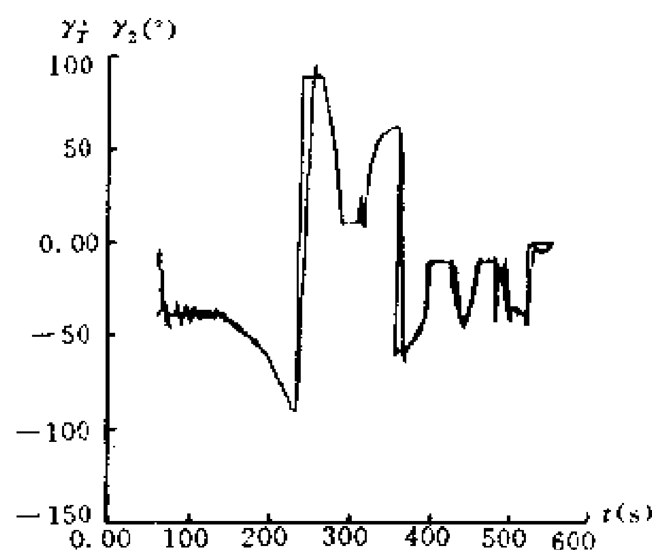


图6-62 $\gamma_2(t)$与γ_2^* 的比较

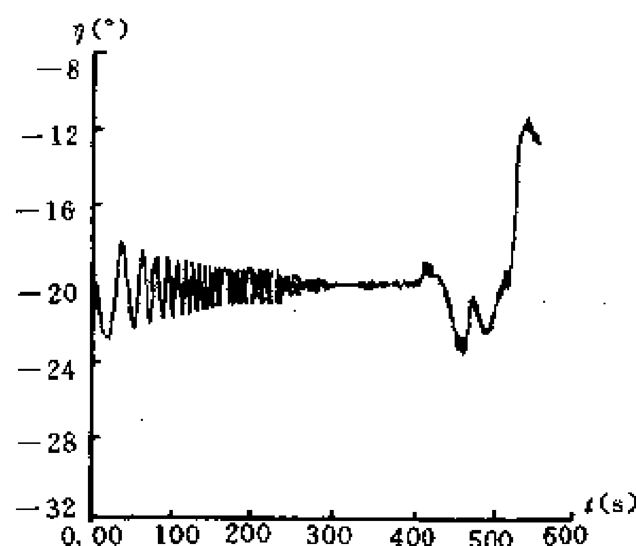


图6-63 总攻角随时间的变化

器。目前成功的或正在设计中的轨道器都是有翼的，它可以像飞机那样在跑道上水平着陆。美国的航天飞机和前苏联的暴风雪号航天飞机轨道器都是这样的轨道器。

航天飞机的返回轨道与卫星、载人飞船的返回轨道相比，具有

再入过载峰值小、机动范围大和着陆精度高的特点，但也带来一系列的复杂问题，如气动热和防热问题等。

航天飞机返回轨道可分三大段：制动段、过渡段和再入着陆段。制动段和过渡段前面已讨论，下面着重介绍再入着陆段。

§6.9.1 航天飞机轨道器再入时的特点

航天飞机轨道器因为要像飞机一样水平着陆，且多次重复使用，给轨道器的研制带来一系列的复杂的技术问题。

轨道器的再入既不同于弹头、卫星和飞船的再入，也不同于一般飞机的进场着陆。轨道器再入的核心技术是一个质量很大的轨道器的巨大能量如何处置的问题。且要保证再入返回时安全准确地返回地面。

轨道器的外形不同于再入弹头、卫星和飞船的返回舱，它有复杂的外形，给空气动力学和气动加热带来了许多新问题。轨道器的再入方式也不同于弹头、卫星和飞船的再入，弹头再入是弹道倾角很大的弹道再入，攻角很小或者为零；卫星的返回是弹道倾角较小的平缓再入，攻角不变化；载人飞船返回舱的再入是小升阻比的再入，机动范围小。总之上述的再入姿态变化小。轨道器的再入方式复杂得多，攻角和姿态都要变化。轨道器的再入也不同于一般的飞机，它再入速度大，飞行高度高，且是无动力的再入着陆，不能复飞，所以对运动参数要求十分严格，不能不满足设计要求，否则着陆失败，损失无法挽回。美国和前苏联航天飞机的设计、制造、使用都把再入技术作为高难技术。

轨道器的再入着陆段可细分为三段，即再入段、末端能量管理段和自动着陆段。

再入段从再入点（飞行高度 $h=120\text{km}$，速度 $v=7600\text{m/s}$）到末端能量管理段的起点（飞行高度 $h=25\text{km}$，速度 $v=762\text{m/s}$，马赫数 $M=2.5$）。

末端能量管理段是从高度 $h=25\mathrm{km}$ 降到高度 $h=3\mathrm{km}$ 为止。该段的任务是引导轨道器与所谓的航向校正柱面相切。

航向校正柱面是在跑道的延长线左右各有一个半径约为6km的圆柱面如图6-64所示。

自动着陆段的任务是引导轨道器在跑道上安全准确着陆。

本书不讨论自动着陆段的运动，重点讨论再入段、末端能量管理段的特性。

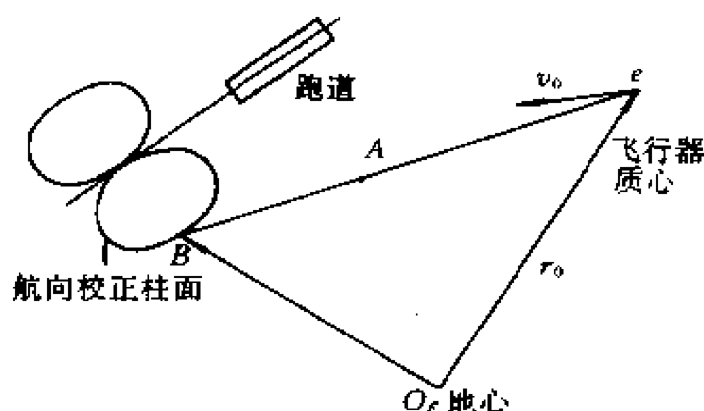


图6-64　航向校正柱面与跑道关系示意图

轨道器再入的特点可以从两方面看：

1. 空气动力学和气动加热

由于轨道器飞行范围从 $M=25$ 到0.5，经历了高超声速、超声速及跨声速区域，攻角从40°变化到14°，加上其外形复杂，带有很多的控制面，所有这些给空气动力学带来十分复杂的理论和实验问题。

再入的关键技术是如何把巨大的能量加以处置，轨道器利用大气减速把巨大的能量（位能加动能）转换成热能，其大部分散发到稠密大气层，实际上只有少量（约10%）被轨道器结构或防热层吸收，然而即使这样少的热也足以引起严重的气动加热，理论计算

轨道器头锥和机翼前缘的温度达1260°～1750℃，机翼表面温度达350°～750℃，操纵面和尾翼达700°～1000℃，远远超过了普通材料的熔点。可重复使用的轨道器的热防护是再入段要解决的主要问题。

2. 飞行控制系统

轨道器的再入飞行控制系统是迄今为止，航天器所使用的最复杂的控制系统。它的特点是：

①飞行速度范围大，M 数从25到0.5.同时要求机动能力强，可在几千公里范围内作机动飞行，最佳地选择再入路线和着陆场；

②轨道器能像普通飞机在跑道上着陆；

③飞行控制系统要能适应纯空间的航天器的工作方式和进场着陆的纯气动的航天器工作方式，并且两种工作方式之间要适当平衡，即能适应过渡状态的工作方式；

④由于轨道器载人，且再入段飞行时间长，对过载有更严格的要求；

⑤控制系统应使轨道器在飞行中不断滚动，以保证机身不在一个方向过份气动加热。

再入飞行的上述特点，要求飞行控制系统设计为变结构型的控制系统。

§6.9.2 轨道器再入时的关键技术

从轨道器再入时的特点可以看出，轨道器再入时的关键技术如下：

(1)轨道器高超声速空气动力学和气动加热

轨道器再入时像卫星、飞船一样，其飞行速度、高度变化范围大，又像飞机那样大攻角再入且姿态变化大，再加上环境复杂，不仅有非定常分离，还有强烈的气动加热，所以轨道器应具备再入飞行器和飞机具备的一切品质。强烈的气动加热，严重影响着机体结

构选择和机载设备的正常工作。复杂的气动特性要求决定了轨道器的外形。大攻角的高超声速空气动力学和气动加热是轨道器再入的关键技术之一。

(2)轨道器防热材料和防热系统的研制

从轨道器再入时的特点知，没有防热材料上的成就，轨道器的设计就没有任何物质基础。因此防热材料和技术方面的突破性进展是轨道器再入成功的首要条件，也是轨道器再入的关键技术。

(3)再入飞行控制技术

轨道器从离轨到进场着陆的整个飞行任务由轨道器的飞行控制系统保证。再入飞行控制系统要从纯空间飞行到高超声速、超声速和亚声速飞行的各段提供制导和控制，同时控制系统在功能、性能、精度和可靠性方面要求极高，不是一般运载火箭和飞机可以相比的。大攻角的高速再入造成了速度、高度和姿态的极大变化，由空气动力和气动加热造成的极恶劣环境，再加上无动力的返回再入，要确保一次成功，所有这一切给再入制导和姿态控制提出了极高的要求。因此再入飞行控制技术也是轨道器再入的关键技术。

再入飞行控制技术是最复杂的关键技术，归纳起来原因如下：

①从速度上看，M 数从25到0.25，有各种速度下的控制问题；

②从高度上看，从120km 到水平着陆，既有纯空间状态又有纯气动状态，给控制系统带来问题；

③从飞行状态上看，为了得到良好的轨道器气动特性和温度分布。飞行状态是大攻角飞行，攻角可从$+40^\circ \sim -5^\circ$，纵向既可以是静稳定也可以是静不稳定，这些也给控制系统设计带来困难；

④从要求上看，因为载人，要求过载峰值小，又要求无动力状态下准确安全的着陆，这无疑给制导系统带来严重的困难，例如要求在各种干扰下准确的着陆，便要求经过大量的仿真才能验证；

⑤从设备上，为了完成速度、高度、姿态剧烈变化时的飞行任务，需要大量的敏感元件和执行机构，如何保证这些设备协调地工

作，也是一个困难问题。

上述关键技术如何解决，是各个系统的问题。但它们有一个共同点，所有问题都状态参数有关，而飞行状态参数与轨道设计和制导方法有密切的关系。如果设计好一条标准返回轨道和再入制导方法，可以降低防热要求、减小过载、减小制导误差，便于进场着陆，而且这种改进属于“软”的方面，投资不大，但效果明显。

把再入轨道设计和气动加热和防热系统设计结合起来一起进行，便是一个明显的例子。

以前再入器气动加热设计的程序，都是由弹道设计人员根据飞行任务要求选定再入轨道，然后气动加热设计人员根据给定的轨道计算气动热环境，再提供给防热系统设计人员作为防热设计的依据。而轨道器的气动热设计却与这一程序不同。它的指导思想是让轨道器在接近允许温度的极限状况下工作，这样使轨道器防热系统重量轻。如果再入轨道太陡和穿越大气层太快，就会导致气动热流升高，使得防热系统的表面温度超过材料允许的温度极限。相反，如果再入轨道太平缓，会导致再入飞行时间长，总吸热量增加，热量会由热传导透过防热系统，使得结构温度超过允许极限。这两个极限形成一条“热走廊”。只要把轨道器的再入轨道设计在这条走廊内，就可以确保再入过程中温度不超过两个极限，从而使防热系统能安全地多次重复使用。而且气动热的不确定性（即误差范围）所造成的后果，相当于把这条走廊变狭。通过对再入轨道的综合调整，也仍然使轨道器安全重复地使用。美国航天飞机轨道器的设计与使用，证明上述方法是成功的。

§6.9.3 航天飞机轨道器再入轨道设计

1. 轨道器再入轨道的特点

轨道器由于有翼面，升阻比较大，可以实现水平着陆。因此其再入轨道有以下三个优点

①再入过载小：轨道器再入大气层时可以采用大攻角飞行，速度下降比弹道—升力式要快，当到达过载峰值区时速度已大大降低，加上攻角可事先调整，在过载峰值区时可采用中等攻角飞行，这样可降低过载峰值。圆轨道再入的典型轨道器的过载峰值只有2～2.5g 比弹道—升力式再入器的过载峰值3～4g 要小，这给航天员创造了更加良好的再入环境；

②机动范围大：由于有翼，轨道器比弹道—升力式再入器有更大的升阻比，有更长的在大气层内运动的时间。因此，它具有更大的活动范围，机动范围可达数千公里；

③着陆精度高：轨道器比弹道—升力式的返回舱有更多的控制手段，增加了末端能量管理段和自动着陆段，可以控制得很准确，实现在着陆场跑道上水平着陆，精度可控制到米级。

2. 对轨道器再入轨道的设计要求

如图6-64所示再入段从 e 点开始（它的状态参数：高度 $h=120$km、速度 $v=7620$m/s、距着陆场跑道约7600km）到末端能量管理段的起点（它的状态参数：高度 $h=25293\pm608$m、速度762±30m/s、距跑道距离约96±9km）。

再入段的轨道设计应满足如下要求：

①轨道器再入期间法向过载不大于某一要求值（美国航天飞机轨道器该值取2.5g）；

②再入过程轨道器表面温度不超过该部分温度的允许值；

③对动压 q 要作一定的限制，以便使空气动力舵面的铰链力矩不超过允许值（美国航天飞机轨道器 $q_{max}=16.380$kPa）；

④航天飞机轨道器的再入轨道不能过分平缓，也就是说，不能超过零倾侧角的滑翔飞行；

⑤满足末端能量管理段的初始条件。

3. 轨道器再入轨道设计的数学模型

轨道器再入轨道设计采用三自由度轨道仿真的数学模型。为

简化设计采用控制变量为总攻角 η 和倾斜角 ϕ' 的控制方案，其中 ϕ' 如图4-1所示是总升力 L 与 o_1y_h 之间的夹角，ϕ' 与 ν 和 ϕ_2 由式(4-2-6)、式(4-2-7)有如下关系：

$$\phi' = \nu - \phi_2 \tag{6-9-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi_2 &= \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\eta} \\ \cos\phi_2 &= \frac{\sin\alpha}{\sin\eta} \end{aligned}\right\} \tag{6-9-2}$$

由式(6-9-2)知，若 $\beta=0$，$\phi_2=0$，$\phi'=\nu$.

此时的质心运动方程由可式(2-4-27)和式(2-4-28)得出，由于再入段无推力作用可令 $P_{xh}=P_{yh}=P_{zh}=0$，且略去控制力对质心运动的影响，可令 $F_{cxh}=F_{cyh}=F_{czh}\approx 0$. 式(2-4-27)和式(2-4-28)改写如下

$$\begin{cases} \dot{v} = -\dfrac{C_{x1}\rho v^2 S}{2m} - \dfrac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\phi)\right]\sin\theta_T \\ \qquad - \dfrac{2fM}{r^2}J\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2\sin\phi(\cos\sigma_T\cos\theta_T\cos\phi + \sin\theta_T\sin\phi) \\ \qquad - \omega_e^2 r(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\cos\theta_T - \cos^2\phi\sin\theta_T) \\ \dot{\theta}_T = \dfrac{C_y\rho vS}{2m}\cos\nu - \dfrac{C_z\rho vS}{2m}\sin\nu - \dfrac{fM}{r^2}\Big[1 + \\ \qquad J\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\phi)\Big]\dfrac{\cos\theta_T}{v} + \dfrac{2fM}{r^2}J\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2\cdot\sin\phi \\ \qquad \cdot(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T - \sin\phi\cos\theta_T)\dfrac{1}{v} + \\ \qquad \dfrac{\omega_e^2 r}{v}(\cos\phi\sin\phi\cos\sigma_T\sin\theta_T + \cos^2\phi\cos\theta_T) \\ \qquad - 2\omega_e\cos\phi\sin\sigma_T + \dfrac{v\cos\theta_T}{r} \\ \dot{\sigma}_T = -\dfrac{C_z\rho vS}{2m\cos\theta_T}\cos\nu - \dfrac{C_y\rho vS}{2m\cos\theta_T}\sin\nu \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\quad + \dfrac{2fM}{r^2} J\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2 \sin\phi\cos\phi \dfrac{\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T} \\
\quad - \omega_e^2 r \dfrac{\cos\phi\sin\phi\sin\sigma_T}{v\cos\theta_T} - \dfrac{2\omega_e}{\cos\theta_T}(\cos\phi\cos\sigma_T\sin\sigma_T \\
\quad - \sin\phi\cos\theta_T) + \dfrac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} \\
\dot{\phi} = \dfrac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r} \\
\dot{\lambda} = -\dfrac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \\
\dot{r} = v\sin\theta_T
\end{cases}
$$

由于轨道器在大气层内飞行时间长，地球应看成是一个旋转的椭球体，但进行再入段轨道设计时，地球扁率的影响、旋转地球的影响相对于空气动力的影响可以略去。且不取控制变量为 α、β 和 ν，取总攻角 η 和倾斜 ϕ 为控制变量，假设轨道设计时取 $\beta=0$，则 $\phi=\nu$ 此时式(6-9-3)改写成式(4-2-22)，即

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{v} &= -C_x \frac{qS}{m} - g\sin\theta_T \\
\dot{\theta}_T &= C_L \frac{qS}{mv}\cos\nu - \frac{g\cos\theta_T}{v} + \frac{v\cos\theta_T}{r} \\
\dot{\sigma}_T &= -C_L \frac{qS}{mv\cos\theta_T}\sin\nu + \frac{v\mathrm{tg}\phi\cos^2\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\theta_T} \\
\dot{\phi} &= \frac{v\cos\theta_T\cos\sigma_T}{r} \\
\dot{\lambda} &= \frac{v\cos\theta_T\sin\sigma_T}{r\cos\phi} \\
\dot{r} &= v\sin\theta_T
\end{aligned}
\right\} \qquad (6\text{-}9\text{-}4)
$$

当轨道器再入段初始条件给定，实现所要求的再入轨道，可以通过改变总攻角 η 和倾侧角 ν 来实现，有些学者试图通过优化原理来同时确定总攻角 η 和倾斜角 ϕ，但这样作较复杂。目前的作法

是事是先根据要求选择好总攻角的程序，一般是总攻角随飞行速度变化的曲线，这样确定再入轨道只需确定ϕ了。

总攻角与速度的关系曲线如图6-65所示。

在一般情况下，在再入的初始阶段以大攻角飞行，可以减轻防热结构系统的负担。虽然采用大攻角飞行，可能会使刚进入高热流区的热量比小攻角飞行时高，但由于攻角大，其飞行速度减小很快，能较快的通过高热流区域，这样对防热系统是有利的。在再入初期采用稍小一些的攻角，虽然在刚进入高热流区时的热流比大攻角时低，但因为攻角小，减速慢，其再入全过程的总加热量比大攻角时大，其表面温度比大攻角时高，对防热结构系统的要求更高。但采用稍小一些攻角时，由于减速慢，飞行时间增加，其横向机动能力也相应增加。因此攻角的选择要在平衡热环境和横向机动能力的要求中作出决择。例如美国航天飞机的再入攻角的选取原则是根据任务性质决定的。对于早期的试验性任务，由于防热系统没经过实际的考验。因此，设计指导思想是牺牲一些横向机动能力，以得到在高速下热环境的改善，如图6-65所示，采用这种方案：在速度从再入速度到4420m/s之间，一直保持40°的大攻角，从速度4420m/s起攻角开始减小，一直到速度762m/s（再入段终点）为止，此时攻角为14°

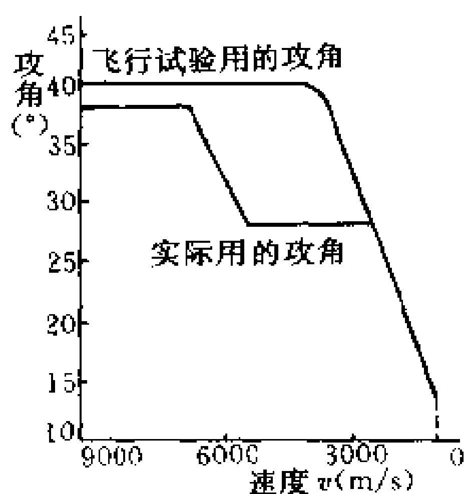


图6-65 攻角随速度的变化

但实际用的攻角有所不同，再入初期总攻角稍小，约为38°，在离开高热流区后，比早期飞行实验任务更早地将攻角改变到28°，

并在28°攻角的情况下维持较长时间，这样减速缓慢，再入飞行时间长，并且攻角为28°时，正好对应于升阻比的最大值，因此，使横向机动能力提高，但表面温度长时间处于较高状态，使得防热系统的要求也相应提高。

如何选择ϕ来确定标准再入轨道，原理上讲，可以把再入时刻的初始状态选为X_0，而末段能量管理段的初始时刻选为X_f，(即再入段的末端时刻选为X_f)，在满足约束条件和边界条件下找一个满足性能指标的最佳轨道作为标准再入轨道。对轨道器除要求$X(t_f)=X_f$外，还要求：

①轨道器飞行中过载不能过大；

②轨道器飞行中动压不能过大；

③轨道器不同部位表面的温度不能超过对该部位的限定温度；

④不能超过零倾侧角的滑翔边界。

性能指标可以有不同的提法，如总吸热量最小、表面温度最低、在一定纵向射程下横程最大等，而控制变量为总攻角η和倾斜角ϕ，或者总攻角η已选定，控制变量仅为ϕ.

但上述问题需求解两点边值问题，不但计算工作量大，且初始条件有变化时其适应能力差，使用起来不灵活，能否像载人飞船返回轨道设计，凭经验确定$\nu(t)$的大小呢？因为约束多，不易得到合适的结果。对升力式再入航天器采用的是根据约束条件确定一个再入走廊，然后在再入走廊内选择满足要求的轨道并加以优化，这样做的好处是只要标准再入轨道选择在再入走廊内就可以满足要求，适应性强。

4. 再入走廊的确定

轨道器的再入制导采用的是有标准轨道的制导。类似载人飞船的再入制导，将再入制导分成纵向制导和侧向制导，也是以纵向

制导为主，由纵向制导确定 ϕ' 的大小，侧向制导确定 ϕ' 的符号。但侧向误差不同于载人飞船的侧向误差。

航天飞机轨道器的方位误差是质心的地心矢 r 和航向校正柱面切点组成的平面与含有轨道器质心地心矢 r 和速度矢 v 组成的平面之间的夹角，如图6-64所示。即轨道器侧向只要求速度方向在由质心地心矢 r 和航向校正柱面切点组成的平面内，称该平面为瞬时平面。

由图6-28知总升力 L 在 o_1y_h 上的投影 $L\cos\phi'$ 决定了轨道器的升降快慢，为了给侧向留有机动能力和纵向制导留有余量，标准再入轨道的倾斜角 ϕ' 不能等于零，实际上用于纵向升降的升力只能是 $L\cos\phi'$，侧力 $L\sin\phi'$ 用于侧向运动。

为了简化，研究纵向运动时，假设速度方向总位于瞬时平面内，但其升力为 $L\cos\phi'$ 或者说纵向运动的升阻比 (L/D) 为 $(L/D)\cos\phi'$。

此时在瞬时平面内的运动方程为：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{v} &= -C_D\frac{\rho v^2 S}{2m} - g\sin\theta_T \\
\dot{\theta}_T &= \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_0 C_D\frac{\rho v S}{2m} - \frac{g\cos\theta_T}{v} + \frac{v\cos\theta_T}{r} \\
\dot{h} &= v\sin\theta_T
\end{aligned}\right\} \tag{6-9-5}$$

假设质心运动的第三个方程是保证速度方向在瞬时平面内。侧向运动的方位误差反映速度方向偏离瞬时平面的大小，侧向制导只能确定 ϕ' 的符号，当方位误差超过限定值时，令 ϕ' 改变符号，以消除侧向误差。

此时的纵向运动是在一系列瞬时平面内的运动，可以想象它在一个平面内运动。纵向再入走廊就是在瞬时平面内定义的。

再入走廊就是飞行的边界，其纵横坐标可以取不同的参数。如§6.1.4介绍的，可以取飞行高度为纵坐标，速度为横坐标如图

6-15所示。但轨道器再入走廊是取阻力加(减)速度 $C_D qS/m$ 为纵坐标，而速度为横坐标。选阻力加速度为纵坐标的优点可以直接对切向过载进行限制，同时当给定阻力加速度和速度的关系后，可以用解析式把射程表示出来，其示意图如图6-66. 在本小节，阻力用 $(C_D qS)$ 表示，阻力加速度 $(C_D qS)/m$ 用 D 表示。

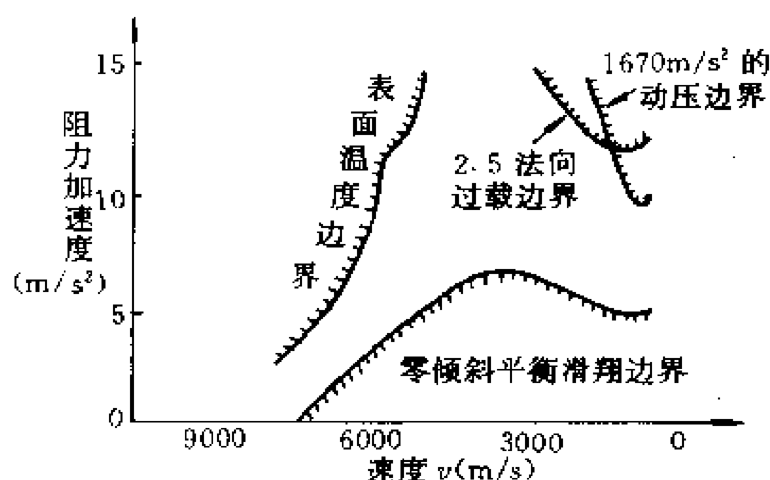


图6-66　再入走廊

轨道器确定再入走廊要考虑下列因素：

①过载因素　轨道器载有航天员，为了在返回再入时有一较舒适的环境，应对法向、轴向过载加以限制，例如轴向加速度 $1.5g$，法向加速度 $2.5g$；

②动压因素　轨道器要采用空气舵面，为了不使所需的铰链力矩过大，应该对动压进行限制，以减小执行机构重量；

③温度因素　轨道器要重复使用，为了不使表面温度过高，要对下降速率加以限制，而且为了避免某一局部蒙皮表面温度过高，应该让轨道器左右摆动；

④平衡滑翔　轨道器要返面地面，不希望高度再增加，应把 $d\theta_T/dt=0$ 的边界画出。

下面具体分析边界的确定方法。

①动压 q 限制的边界，因为已知 $\alpha(v)$，故当 v 已知时，α 也已知，因而可以求出 C_D，因

$$D=\frac{C_D\rho v^2 S}{2m}=\frac{\rho v^2}{2}\frac{S}{m}C_D(v) \tag{6-9-6}$$

现 $q=\frac{1}{2}\rho v^2=1670\text{kg/m}^2$. 则 $D(q)\sim v$ 的曲线可以画出如图6-66所示；

②法向过载限制的边界，在瞬时平面内

$$n_y=\frac{C_L\rho v^2 S}{2mg} \qquad 现\ n_y=2.5$$

故

$$\frac{\rho v^2 S}{2m}=\frac{2.5g}{C_L}$$

$$D=C_D\frac{\rho v^2}{2}\frac{S}{m}=\frac{C_D}{C_L}2.5g \tag{6-9-7}$$

当已知 v 时便已知 α，即可求出 C_D/C_L，故可以决定 $D(n_y)\sim v$ 曲线如图6-66所示；

③平衡滑翔限制的边界，所谓平衡滑翔，令 $\mathrm{d}\theta_T/\mathrm{d}t=0$. 故

$$m\left(\frac{v^2}{r}-g\right)\cos\theta_T+L=0$$

因 θ_T 较小，$\cos\theta_T\approx1$，故

$$\frac{v^2}{r}-g=-C_L\frac{\rho v^2}{2m}S=-C_L(\alpha)\frac{\rho v^2}{2m}S$$

$$D=C_D\frac{\rho v^2}{2m}S=\frac{-\left(\frac{v^2}{r}-g\right)}{C_L}C_D$$

$$=\frac{-\left(\frac{v^2}{r}-g\right)}{C_L/C_D} \tag{6-9-8}$$

当 v 已知时，α 已知，C_L/C_D 也已知，可以求出 $D(E)\sim v$ 曲线，如图6-66所示；

④最大热流限制边界，确切地讲，应该是表面温度限制的边界，但温度的边界与材料、传热等关系很大，不易确定。在初步分析时，可以把温度的限制改成对热流的限制，经分析其变化趋势是相似的。

因为热流 $q\sim\rho^{1/2}v^3$，故可以认为 $\rho^{1/2}v^3=C$.

$$D=C_D\frac{\rho v^2 S}{2m}=\frac{C_D S}{2m}\frac{C^2}{v^4} \tag{6-9-9}$$

当 v 已知时，α 已知，C_D 可求出，可以作出 $D(T)\sim v$ 的关系曲线，其大致关系如图6-66所示。

5. 再入段的射程估算

轨道器的再入走廊确定之后，就可以在再入走廊内选择一个满足射程要求的飞行剖面，如图6-67所示。

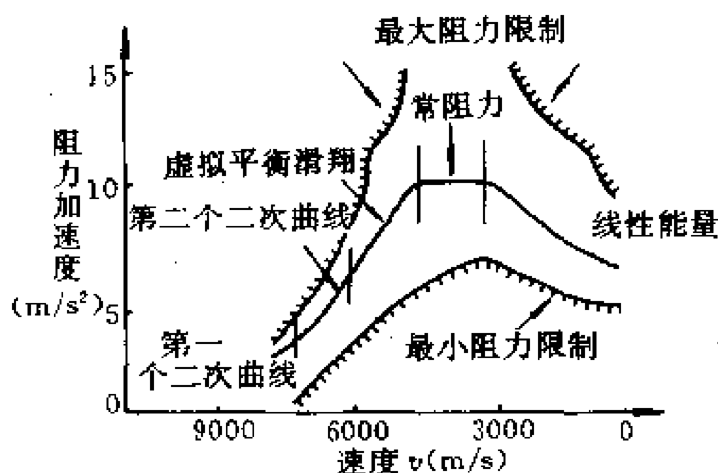


图6-67 再入走廊内阻力加速度剖面图

当把轨道器控制到沿此剖面飞行时就可以达到预定的目标。本小节讨论当选择好剖面后，如何用解析式估算射程。设轨道器在瞬时平面内则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=-C_D\frac{\rho v^2}{2m}S-g\sin\theta_T\\\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}&=v\cos\theta_T\end{aligned}\right\}\tag{6-9-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}=-\frac{v\cos\theta_T}{D+g\sin\theta_T}\tag{6-9-11}$$

$$R=-\int\frac{v\cos\theta_T}{D+g\sin\theta_T}\mathrm{d}v\tag{6-9-12}$$

对轨道器而言，当 v 较大时，θ_T 较小，$\cos\theta_T\approx1$，$\sin\theta_T\approx0$. 则

$$R=-\int\frac{v}{D}\mathrm{d}v\tag{6-9-13}$$

可见只要给出 $D\sim v$ 的关系，就可以确定射程。在再入走廊内阻力加速度与 v 的关系可以根据需要来确定，通常有如下三种：

①阻力加速度与 v 成二次关系曲线

$$D=C_1+C_2v+C_3v^2\tag{6-9-14}$$

②阻力加速度与 v 成如下关系

$$D=\frac{g}{L/D}\left(1-\frac{v^2}{v_s^2}\right)\tag{6-9-15}$$

③阻力加速度与 v 无关，它是一个常数

$$D=C\tag{6-9-16}$$

(1)阻力加速度 D 与 v 成二次曲线时

将 $D=C_1+C_2v+C_3v^2$ 代入式(6-9-13)可得

当 $4C_3C_1-C_2^2>0$ 时

$$R=\frac{-1}{2C_3}\ln\left(\frac{C_1+C_2v_F+C_3v_F^2}{C_1+C_2v+C_3v^2}\right)+\frac{C_2}{\sqrt{4C_3C_1-C_2^2}}\cdot\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2C_3v_F+C_2}{\sqrt{4C_3C_1-C_2^2}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{2C_3v+C_2}{\sqrt{4C_3C_1-C_2^2}}\right)\right]\tag{6-9-17}$$

当 $4C_3C_1-C_2^2=Q<0$

$$R = \frac{-1}{2C_3}\ln\left(\frac{C_1 + C_2 v_F + C_3 v_F^2}{C_1 + C_2 v + C_3 v^2}\right) + \frac{C_2}{2C_3\sqrt{-Q}}\ln\left[\frac{\dfrac{2C_3 v_F + C_2 - \sqrt{-Q}}{2C_3 v_F + C_2 + \sqrt{-Q}}}{\dfrac{2C_3 v + C_2 - \sqrt{-Q}}{2C_3 v + C_2 + \sqrt{-Q}}}\right] \tag{6-9-18}$$

其中 v_F 为积分终端时刻的速度。

(2)阻力加速度与 v 成如下关系 $D=\frac{g}{(L/D)}(1-\frac{v^2}{v_s^2})$时

将 $D=\frac{g}{L/D}(1-\frac{v^2}{v_s^2})$代入式(6-9-13)可得

$$R = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{v_s^2 - v^2}{D}\right)\ln\left(\frac{v_F^2 - v_s^2}{v^2 - v_s^2}\right)\right. \tag{6-9-19}$$

其中 v_F 为此段飞行终端时刻的速度。

得到式(6-9-19)时，假设升阻比 L/D 为常数。

取 $D=\frac{g}{(L/D)}(1-v^2/v_s^2)$的意义可这样分析，当 θ_T 较小时，$\cos\theta_T\approx 1$，令 $d\theta_T/dT=0$，θ_T 为常数，轨道器作滑翔飞行，则由式(6-9-5)可得：

$$D = \frac{g(1 - v^2/gr)}{L/D} \tag{6-9-20}$$

对比式(6-9-15)和(6-9-20)，可认为此时的飞行是一个虚拟滑翔飞行，用 v_s^2 代替 gr，v_s 为任意常数。

(3)阻力加速度是一个与 v 无关的常数

将 $D=C_4$代入式(6-9-13)可得

$$R = \frac{v^2 - v_F^2}{2C_4} \tag{6-9-21}$$

其中 v_F 是此小段终端时刻的速度。

但当飞行速度较低时，此时 $|\theta_T|$ 已较大，估算射程用式

(6-9-13)误差较大，为此可不采用 v 为自变量，而以机械能为自变量，此时计算误差要小一些。设单位质量机械能为 E

则
$$E = gh + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{dE}{dh} = g + v\frac{dv}{dh}$$

而
$$\frac{dv}{dh} = -\frac{D}{v\sin\theta_T} - \frac{g}{v}$$

$$\frac{dE}{dh} = -\frac{D}{\sin\theta_T}, \frac{dh}{dR} = \mathrm{tg}\theta_T,$$

$$\frac{dR}{dE} = -\frac{\cos\theta_T}{D}$$

$$R = \int dR = -\int \frac{\cos\theta_T}{D}dE \tag{6-9-22}$$

因为即使 $|\theta_T|$ 稍大，令 $\cos\theta_T \approx 1$，误差也不十分大

则
$$R = -\int \frac{dE}{D} \tag{6-9-23}$$

当假设 D 是能量 E 的函数时，上式是可以积分的，在低速时取

$$D = D_F - C_5(E - E_F) \tag{6-9-24}$$

则
$$R = \frac{E - E_F}{D - D_F}\ln\left(\frac{D}{D_F}\right) \tag{6-9-25}$$

在再入走廊内阻力加速度剖面选择5种基本的线段：两个二次阻力加速度曲线段，用在高速加热段，即 $D_1 = C_{11} + C_{12}v + C_{13}v^2$ 和 $D_2 = C_{21} + C_{22}v + C_{23}v^2$；一个虚拟平衡滑翔段和一个常阻力段，它们用在中速范围，可保证轨道飞行器有足够的纵向下降距离和横向机动能力，同时控制轨道器在再入走廊中心的附近，即 $D = \frac{g}{(L/D)}(1 - v^2/v_s^2)$ 和 $D = C_4$；最后一段系阻力加速度和能量成线性关系，它用在低速，即 $D = D_F - C_5(E - E_F)$：五段曲线的示意图如图 6-67. 五个阻力加速度段的联结点坐标 (v, D)，以及对第一

段的 C_{11}、C_{12}、C_{13}，第二段的 C_{21}、C_{22}、C_{23}，第三段的 v_s，第四段的 C_4 及第五段的 C_5 共九个系数，可以在满足约束条件下加以优化，并且可在实际飞行中根据情况加以改变。

选定五个基本段组成的剖面，其射程有偏差，如何调整剖面形状使射程偏差为零，可有两种方法，一种是总的调整剖面形状，重新设计每一段的射程；另一种是局部调整某一段射程如图 6-68 所示，通过调整二次曲线的射程，使射程误差为零，但阻力加速度曲线最后一段的射程不变，常阻力段的数值也不变。当然也可以调整其它段的射程，使射程误差为零

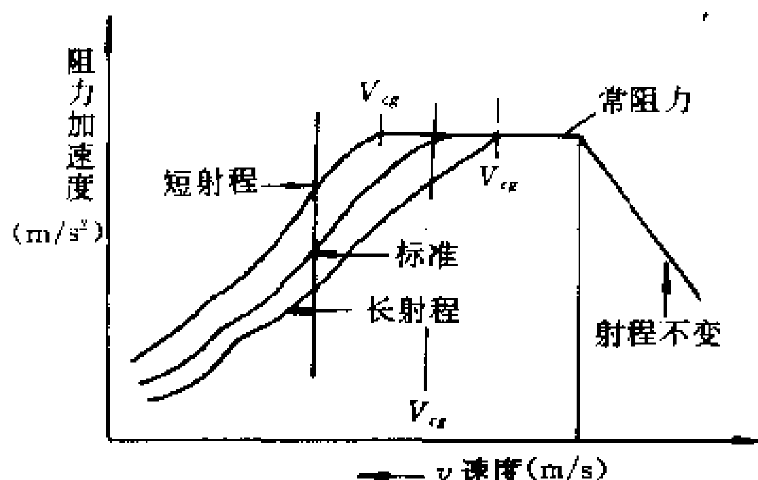


图6-68 飞行剖面形状调整射程

6. 再入段标准升阻比 $(L/D)_0$ 的确定

当设计好阻力加速度剖面后，就可以算出沿该剖面飞行时各段的升阻比 $(L/D)_0$。

因

$$\rho=\rho_0 e^{-h/h_s},\quad h_s=1/\beta,$$

$$D=\frac{1}{2}\frac{\rho v^2 C_D S}{m}$$

可以得

$$\frac{\dot{D}}{D}=\frac{\dot{\rho}}{\rho}+\frac{2\dot{v}}{v}+\frac{\dot{C}_D}{C_D} \tag{6-9-26}$$

因
$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\dot{h}}{h_s} \tag{6-9-27}$$

则
$$\dot{h} = -h_s\left(\frac{\dot{D}}{D} + \frac{2D}{v} - \frac{\dot{C}_D}{C_D}\right) \tag{6-9-28}$$

又
$$\dot{h} = v\sin\theta_T = v\theta_T \tag{6-9-29}$$

$$\ddot{h} = \dot{v}\theta_T + \dot{\theta}_T v \tag{6-9-30}$$

当 θ_T 较小，$\cos\theta_T \approx 1$，则式(6-9-30)可改写成

$$\ddot{h} = \left(\frac{v^2}{r} - g\right) + \left(\frac{L}{D}\right)D - D\frac{\dot{h}}{v} \tag{6-9-31}$$

再利用式(6-9-28)可以得

$$\ddot{h} = -h_s\left(\frac{2\dot{D}}{v} + \frac{2D^2}{v^2} + \frac{\ddot{D}}{D} - \frac{\dot{D}^2}{D^2} + \frac{\dot{C}_D^2}{C_D^2} - \frac{\ddot{C}_D}{C_D}\right) \tag{6-9-32}$$

联立解式(6-9-32)、(6-9-31)、(6-9-29)可以得

$$\ddot{D} - \dot{D}\left(\frac{\dot{D}}{D} - \frac{3D}{v}\right) + \frac{4D^3}{v^2} = -\frac{D}{h_s}\left(\frac{v^2}{r} - g\right) - \frac{D^2}{h_s}\frac{L}{D}$$
$$-\frac{\dot{C}_D}{C_D}D\left(\frac{\dot{C}_D}{C_D} - \frac{D}{v}\right) - \frac{\ddot{C}_D}{C_D}D \tag{6-9-33}$$

上式表示阻力加速度及其导数与升阻比 L/D 和 C_D、$\dot{C}_D$、$\ddot{C}_D$ 的关系。如果已知 D 与 v 的关系，利用式(6-9-33)就可以得到所需要的升阻比$(L/D)_0$，例如设 $D=C_1+C_2v+C_2v^2$，在 $\sin\theta_T\approx 0$的假设下可以得

$$(L/D)_0 = -\frac{1}{D}\left(\frac{v^2}{r} - g\right) + \frac{4h_sC_1}{v} - \frac{h_sC_2}{v}$$
$$-\frac{h_s\dot{C}_D}{C_DD}\left(\frac{\dot{C}_D}{C_D} - \frac{D}{v}\right) + \frac{h_s\ddot{C}_D}{C_DD} \tag{6-9-34}$$

对其它情况的阻力加速度曲线，也可以得到所需的升阻比，但实际应用中略去 $\dot{C}_D$ 及 $\ddot{C}_D$，得到简化的$(L/D)_0$表达式如表6.7，在轨道器再入制导中需要知道沿剖面飞行时的 $\dot{h}_0$，表6.7列出了 $\dot{h}_0$。

表6.7 $(L/D)_0$和$\dot{h}_0$的表达式

状　态	D	$\dot{h}_0$	$(L/D)_0$
温度控制(热流)	$C_1+C_2v+C_3v^2$	$-\frac{hs}{v}(2C_1+C_2v-\frac{C_Dv}{C_D})$	$\frac{g}{D}(1-\frac{v^2}{gr})-\frac{4h_sC_1}{v^2}-\frac{h_sC_2}{v}$
虚拟平衡滑翔	$\frac{g}{(L/D)}(1-\frac{v^2}{v_s^2})$	$-\frac{h_s}{v}\left[\frac{2D}{(1-\frac{v^2}{v_s^2})}-\frac{C_Dv}{C_D}\right]$	$\frac{g}{D}(1-\frac{v^2}{gr})-\frac{4h_sD}{v(1-v^2/v_s^2)}$
常阻力加速度	C_4	$-h_s(\frac{2D}{v}-\frac{C_D}{C_D})$	$\frac{g}{D}(1-\frac{v^2}{gr})-\frac{4h_sD}{v^2}$
转移状态	$D_F+C_5(E-E_F)$	$-h_s\left[\frac{2Dv-C_5v^3}{v^2+2h_sg}-\frac{C_Dv}{C_D}\right]$	$\frac{g}{D}(1-\frac{v^2}{gr})+(2v\dot{h}_0+2\dot{h}_0^2\frac{g}{D}$ $+2Dh_s+2g\dot{h}_0h_s/v)/$ $(v^2+2gh_s)+\frac{\dot{h}_0}{v}+\frac{g\dot{h}_0^2}{Dv^2}$

7. 航天飞机轨道器再入轨道设计

轨道器再入轨道设计实质上就是选择总攻角η和倾斜角ϕ，假设无侧滑也就是确定攻角α和倾侧角ν.

前面已讨论过攻角与速度的关系，可根据热流的限制和横向机动能力的要求加以确定。需要确定的是倾侧角ν.

类似载人飞船返回再入轨道设计，倾斜角ν的大小用来满足各种约束条件，且要留有余量；倾侧角ν的符号由侧向制导来确定。

但轨道器再入轨道设计中，因限制过多，不能像载人飞船那样凭借经验选择分段的常数值，再通过仿真计算，看其约束条件是否满足来确定ν的大小，而是根据约束条件先确定再入走廊，然后在

再入走廊内选择合适的飞行剖面，调整剖面的形状，使其射程满足设计要求。当飞行剖面确定之后，便可以确定如果要沿此剖面飞行时的升阻比(L/D)。当飞行状态确定时，即飞行速度、高度、攻角已知时，轨道器能提供的升阻比(L/D)是已知的，则倾侧角ν_0可由下式确定

$$\cos\nu_0 = \frac{(L/D)_0}{(L/D)} \tag{6-9-35}$$

$\nu_0(t)$不能恒等于零，要给侧向机动和纵向制导留有余量，但$|\nu_0|$也不能过大，否则升力在纵向的分量过小，下降过快。可以通过调整飞行剖面在再入走廊中的位置改变ν_0的大小。

因为有倾斜，但倾斜不应单方向进行，否则侧向误差太大，可以给侧向方位误差规定一个区域，如图6-69所示。

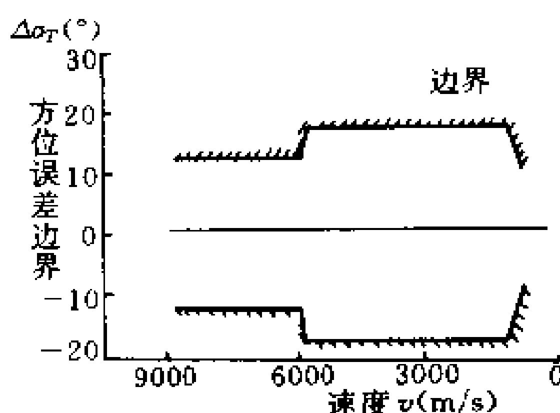


图6-69　方位误差边界与相对速度的关系

下面讨论轨道器的方位误差，轨道器侧向制导的任务是使速度方向在瞬时平面内，或者在其附近。设瞬时平面在地球表面上的大圆弧与正北方向的夹角为σ_t，而轨道器半速度坐标系按2-3-1次序旋转的航迹偏航角为σ_T，则轨道器的方位误差可定义为

$$\Delta\sigma_T = \sigma_T - \sigma_t$$

当$\Delta\sigma_T$大于方位误差的边界，倾侧角ν要反号；在边界区域

内，ν保持原来的符号。

当攻角α和ν已确定，代入式(6-9-3)便可以求出轨道器的再入标准轨道。倾侧角ν随速度变化的示意图如图6-70所示。

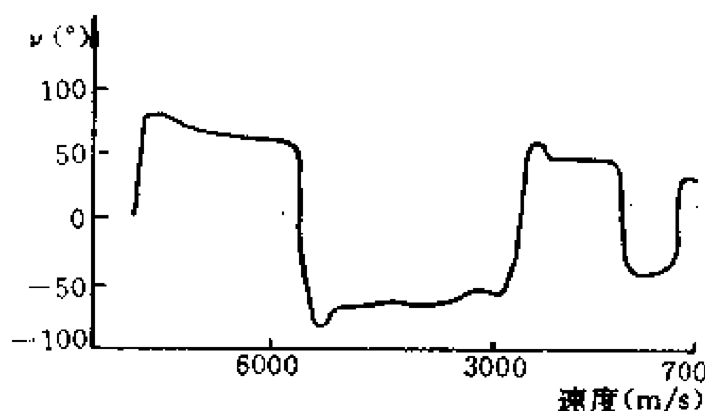


图6-70　倾侧角随相对速度v的变化过程

§6.9.4　轨道器的再入制导方法

轨道器采用的再入制导方法是有标准轨道的制导方法，侧向制导是开关控制，下面主要讨论纵向制导。

轨道器的标准轨道是可以调整的，因为它的阻力加速度剖面可以改变。轨道器再入制导的基本思想是控制轨道器的升阻比等于所选择的阻力加速度剖面所确定的升阻比(L/D)。

设再入制导纵向所需的升阻比为$(L/D)_c$，制导所增加的升阻比为$\Delta(L/D)$，则

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + \Delta(L/D) \tag{6-9-36}$$

制导的目的是使实际的飞行剖面接近所选定的飞行剖面，且为了保证制导效果，过渡过程良好，$\Delta(L/D)$应由下式决定

$$\Delta(L/D) = f_1\Delta D + f_2\Delta\dot{D} + f_3\Delta v \tag{6-9-37}$$

由式(6-9-33)知升阻比(L/D)与阻力加速度和速度有如下关系：

$$\ddot{D}-\dot{D}(\frac{\ddot{D}}{\dot{D}}-\frac{3D}{v})+\frac{3D^3}{v^2}=-\frac{D}{h_s}(\frac{v^2}{r}-g)-\frac{D^2}{h_s}\frac{L}{D}$$

$$-\frac{\dot{C}_D}{C_D}D(\frac{\dot{C}_D}{C_D}-\frac{D}{v})-\frac{\ddot{C}_D D}{C_D} \qquad (6\text{-}9\text{-}33)$$

将上式线性化。先令

$$\left.\begin{aligned}\Delta D &= D-D_0\\ \Delta\dot{D} &= \dot{D}-\dot{D}_0\\ \Delta\ddot{D} &= \ddot{D}-\ddot{D}_0\\ \Delta v &= v-v_0\\ \Delta(\frac{L}{D}) &= (\frac{L}{D})-(\frac{L}{D})_0\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9\text{-}38)$$

D_0、$\dot{D}_0$、$\ddot{D}_0$、v_0、$(L/D)_0$为标准再入轨道的阻力加速度、阻力加速度导数、阻力加速度二阶导数、飞行速度、升阻比，D、$\dot{D}$、$\ddot{D}$、v、(L/D)为实际轨道上相应的值。ΔD、$\Delta\dot{D}$、$\Delta\ddot{D}$、Δv 和 $\Delta(L/D)$为其增量。

将式(6-9-38)代入式(6-9-33)，且只保留一阶项，可得：

$$\Delta\ddot{D}+(\frac{3D_0}{v_0}-\frac{2\dot{D}_0}{D_0})\Delta\dot{D}+[3\dot{D}_0(\frac{\dot{D}_0}{D_0^2}-\frac{1}{v_0})+\frac{4D_0^2}{v_0^2}$$

$$-\frac{1}{h_s}(\frac{v_0^2}{r_0}-g)-\frac{2\ddot{D}_0}{D_0}-\frac{\dot{C}_{D0}^2}{C_{D0}^2}+\frac{\ddot{C}_{D0}}{C_{D0}}]\Delta D$$

$$+(\frac{2D_0v_0}{h_sr_0}-\frac{3\dot{D}_0D_0}{v_0^2}-\frac{8D_0^3}{D^3}+\frac{\dot{C}_{D0}D_0^2}{C_{D0}v_0^2})\Delta v$$

$$=\frac{D_0}{h_s}\Delta(\frac{L}{D})+\frac{D_0}{C_{D0}}\Delta\ddot{C}_D+(\frac{D_0}{C_{D0}v_0}-\frac{2D_0\dot{C}_{D0}}{C_{D0}^2})\Delta\dot{C}_D$$

$$+\left(\frac{2\dot{C}_{D0}^2D_0}{C_{D0}^3}-\frac{\dot{C}_{D0}D_0^2}{C_{D0}^2v_0}-\frac{\ddot{C}_{D0}D_0}{C_{D0}^2}\right)\Delta C_D \qquad (6\text{-}9\text{-}39)$$

其中凡带下标“0”表示标准轨道上的值，取自变量为 v，故 Δv 等于零，且攻角与速度的关系是事先设计的，仅利用 ϕ 进行调整，故 ΔC_D、$\Delta\dot{C}_D$、$\Delta\ddot{D}_D$ 等于零。式(6-9-39)可改写成

$$\Delta\ddot{D}+(\frac{3D_0}{v_0}-\frac{2\dot{D}_0}{D_0})\Delta\dot{D}+[3\dot{D}_0(\frac{\dot{D}_0}{D_0^2}-\frac{1}{v_0})+\frac{4D_0^2}{v_0^2}-$$

$$\frac{1}{h_s}(\frac{v_0^2}{r_0}-g)-\frac{2\ddot{D}_0}{D_0}-\frac{\dot{C}_{D0}^2}{C_{D0}^2}+\frac{\ddot{C}_{D0}}{C_{D0}}]\Delta D=\frac{D_0}{h_s}\Delta(\frac{L}{D}) \tag{6-9-40}$$

将式(6-9-37)代入式(6-9-40)可得：

$$\Delta\ddot{D}+(\frac{D_0^2}{h_s}f_2+\frac{3D_0}{v_0}-\frac{2\dot{D}_0}{D_0})\Delta\dot{D}+[\frac{D_0^2f_1}{h_s}+3\dot{D}_0(\frac{\dot{D}_0^2}{D_0^2}-\frac{1}{v})$$
$$+\frac{4D_0^2}{v_0^2}-\frac{1}{h_s}(\frac{v_0^2}{r_0}-g)-\frac{2\ddot{D}_0}{D_0}-\frac{\dot{C}_{D0}^2}{C_{D0}^2}+\frac{\ddot{C}_{D0}}{C_{D0}}]\Delta D=0 \tag{6-9-41}$$

这是一个二阶系统，采用固化系数法，可看成常系数二阶系统，设其解为振荡形式，式(6-9-41)可写成标准形式

$$\Delta\ddot{D}+2\xi\omega\Delta\dot{D}+\omega^2\Delta D=0 \tag{6-9-42}$$

对比式(6-9-41)和式(6-9-42)可得：

$$f_1=\frac{h_s}{D_0^2}[\omega^2+3\dot{D}_0(\frac{1}{v_0}-\frac{\dot{D}_0^2}{D_0})+\frac{1}{h_s}(\frac{v_0^2}{r_0}-g)-\frac{4D_0^2}{v_0^2}$$
$$+\frac{2\ddot{D}_0}{D_0}+\frac{\dot{C}_{D0}^2}{C_{D0}}-\frac{\ddot{C}_{D0}}{C_{D0}}] \tag{6-9-43}$$

$$f_2=\frac{h_s}{D_0^2}(2\xi\omega+\frac{2\dot{D}_0}{D_0}-\frac{3D_0}{v_0}) \tag{6-9-44}$$

在实际工程中，为避免求 $\Delta\dot{D}$ 的困难，将 $\Delta\dot{D}$ 用 $\Delta\dot{h}$ 来代替，$\Delta\dot{h}=\dot{h}-\dot{h}_0$，则式(6-9-37)变成

$$\Delta(L/D)=f_1\Delta D+f_2\Delta\dot{h}+f_3\Delta v \tag{6-9-45}$$

利用式(6-9-28)

$$\dot{h}=-h_s(\frac{\dot{D}}{D}+\frac{2D}{v}-\frac{\dot{C}_D}{C_D})$$

可得

$$\Delta\dot{D}=-(\frac{\dot{h}_0}{h_s}+\frac{4D}{v_0}-\frac{\dot{C}_{D0}}{C_{D0}})\Delta D-\frac{D_0}{h_s}\Delta\dot{h}+\frac{2D_0^2}{v_0}\Delta v \tag{6-9-46}$$

同样，取自变量为 v，令 $\Delta v=0$

将式(6-9-46)代入(6-9-37)，再与式(6-9-45)相比较可以得：

$$f_1 = f_1' - f_2'(\frac{\dot{h}_0}{h_s} + \frac{4D_0}{v_0} - \frac{\dot{C}_{D0}}{C_{D0}}) \tag{6-9-47}$$

$$f_2 = - f_2' \frac{D_0}{h_s} \tag{6-9-48}$$

用于纵向的控制升阻比 $(L/D)_c$ 用下式计算：

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + f_1 \Delta \dot{D} + f_2 \Delta \dot{h} \tag{6-9-49}$$

真正轨道器用的 $(L/D)_c$ 要增加一项

$$(L/D)_c = (L/D)_0 + f_1 \Delta \dot{D} + f_2 \Delta \dot{h} + f_4 \int (D - D_0) \mathrm{d}t \tag{6-9-50}$$

引入最后一项是为避免由于导航系统在确定高度变化率不精确而引起的静态轨道偏差。

故实际的倾斜角 ϕ 由下式决定：

$$\cos\phi' = \frac{(L/D)_c}{(L/D)} \tag{6-9-51}$$

用式(6-9-43)和式(6-9-44)计算 f_1、f_2 过分复杂，在实际中 f_1、f_2 往往用经验曲线加以逼近，如 $\xi=0.7$，周期取90s 到200s，则 f_1、f_2 经验曲线如图6-71所示。f_1、f_2 的经验公式如下：

$$f_1 = f_5 D^{f_6} + f_9 (D - D_0) \tag{6-9-52}$$

$$f_2 = f_7 D^{f_8} \tag{6-9-53}$$

其中 f_5、f_6、f_7、f_8 和 f_9 可由 f_1、f_2 的理论计算拟合而成。

§6.9.5 轨道器飞行控制命令和仿真分析

1. 轨道器飞行控制命令

当采用式(6-9-51)用于纵向制导时，实际的阻力加速度剖面与标准阻力加速度剖面不完全重合，当倾斜角反向时，反向并不能

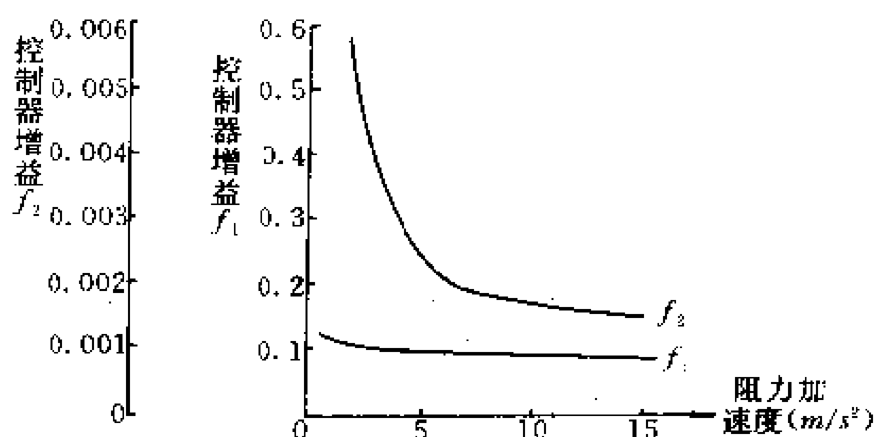


图6-71　反馈增益系数 f_1、f_2 随阻力加速度的变化

瞬时完成，而当倾斜角为零期间，使瞬时平面内升力分量暂时增加，使阻力加速度低于要求的水平，在倾斜反向后，将稳定到要求的阻力加速度剖面，如图6-72所示。

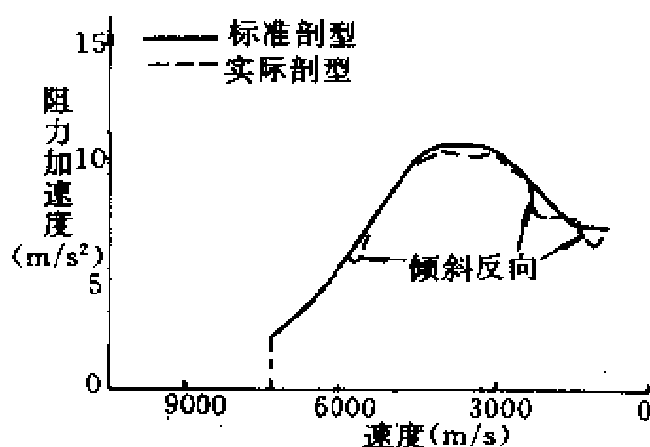


图6-72　仅有倾斜角控制时实际的剖面

为了克服倾斜反向时带来的上述问题，可采用在主控制为倾斜角的同时，对攻角也加以小的调整。令

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{C_D(D - D_0)}{f_{1D}} \tag{6-9-54}$$

而倾斜角的控制命令也按下式给出

$$\phi = \arccos\left[\frac{(L/D)_c}{(L/D)}\right] + f_{11}\frac{C_D(D - D_0)}{f_{10}} \tag{6-9-55}$$

当同时采用倾斜角和攻角进行控制时，其实际阻力加速度剖面和标准阻力加速度剖面的关系如图6-73所示，从图看出仅有倾斜角控制时的倾斜反向跳动已得到补偿。攻角与速度的关系，不完全事先确定，由式(6-9-54)确定的攻角与速度关系同图6-65所示攻角与速度的关系稍有不同，但差别不大。

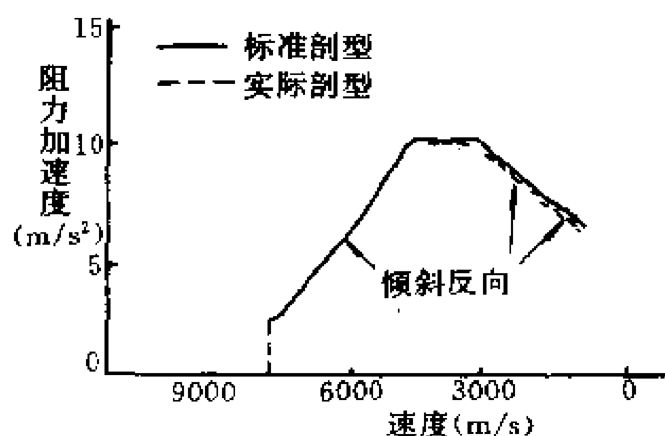


图6-73　倾斜角和攻角同时控制时实际的剖面

2. 轨道器再入段仿真分析

文献[37]对轨道器的制导方法进行了蒙特卡洛方法的50次抽样分析。考虑了如下的干扰因素：空气动力的升力和阻力系数误差、大气密度、压力和温度误差、惯性器件偏差、初始条件偏差、风的扰动和外部地面导航系统误差。

文献[37]画出了阻力加速度、倾斜角、攻角、过载以及动压随速度 v 变化的曲线，均在标准轨道对应的参数附近变化。当 $v=762$m/s 时，距离偏差为±4.08km，而要求的距离制导精度3σ为±9.27km，说明该制导方法是可行的。轨道器的飞行试验也说明再

入制导的性能十分优良。

§6.9.6 轨道器末端能量管理(TAEM)段的制导方法

1. TAEM 段对制导系统的要求

末端能量管理段是轨道器再入返回的一段，只是因制导方法是通过能量一射程的剖面而对其实施制导，并对能量加以控制，故名为末端能量管理段。

TAEM 段的开始是再入段的结束，此时飞行状态是图6-64的 A 点，其参数 $h=25298\pm608$m. $v=762\pm30$m/s，$\alpha=10\pm3°$，$\theta_T=-11\pm4°$，航向角 $=\pm10°$，可以看出对飞行状态参数的准确度要求并不高，允许有一定的偏差。因而 TAEM 制导系统也应适应这一情况。对 TAEM 制导系统的要求是：①当轨道器再入结束时的状态变量有3σ 的偏差时仍然能实施控制；②在有风和严重干扰下系统仍然能正常工作；③在飞行过程中不超过对轨道飞行器的约束条件，例如要求(a)法向过载－0.75—2.75，(b)侧向过载0.5，(c)动压在684—1465kg/m^2等；④轨道器在 TAEM 结束时状态参数应满足自动着陆的要求。

一般认为轨道器在 $h=3408$m 时，满足下述要求的典型自动着陆仿真可以保证一个安全的自动着陆。

(a)相对于跑道的航向±10°

(b)相对于地面的飞行路线角21±4°

(c)动压1392±117kg/m^2

(d)高度3048±305m

(c)相对于跑道的横向位置±305m

(f)等效的空气速度149±6m/s

可见虽然末端能量管理段是通过能量对飞行进行控制，但最终仍对结束点的高度、横向偏差、速度大小和方向有要求。因为还有自动着陆段，所以对状态参数的要求并不很高，在允许的偏差范

围内仍可成功地着陆。

2. TAEM 的弹道分段

TAEM 段的目的是消耗和控制能量，而能量随距离的变化可由下式决定，已知单位质量的机械能为 E，则

$$E=\frac{v^2}{2}+hg \tag{6-9-56}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}=\frac{-C_D qS}{\cos\theta_T} \tag{6-9-57}$$

由式(6-9-57)看出要多消耗能量可以采用三种方法：

(a)增加飞行距离，即进行 S 形的飞行

(b)调整动压 q 的大小

(c)调整 C_D 的大小

轨道器为了进行控制和制动有七个空气舵：四个安装在机翼后缘叫升降副翼，它们综合了飞机的升降舵和副翼的作用，上下偏转控制俯仰，两边相反方向偏转则起副翼作用；还有一个机体襟翼，再入时提供热防护且进行微调；第六、七是舵和制动板，位于垂直稳定尾翼后部，同时向一个方向摆动起偏航舵作用，左右同时展开，则起制动作用。

在同样条件下进行 S 形转弯飞行，显然可使能量消耗增加。而动压 q 的增加可增加阻力并使弹道变陡。当然调整攻角的大小也可以达到同样的目的，但攻角的调整还应考虑其他因素，所以在 TAEM 段攻角的调整没被采用。而垂直尾翼的速度制动角 δ_s 的大小，因为它直接影响阻力的大小和弹道的倾角，所以也可以用来调整能量的消耗率。

轨道器可以用升降副翼和速度制动板的偏转来调整轨道飞行器的高度、速度(通过动压)、滚动角、横向距离等。具体的动压和速度可以同时通过调整升降副翼的偏转角 δ_B 和速度制动角 δ_s 来实现。飞行高度可以通过升降副翼 δ_B 来实现，而滚动角和横向偏差

可以通过升降副翼的差动偏转来实现,其详细方块图可参考文献[38]。

根据飞行和制导特点,TAEM 的飞行可分成四小段,其示意图如6-74所示。

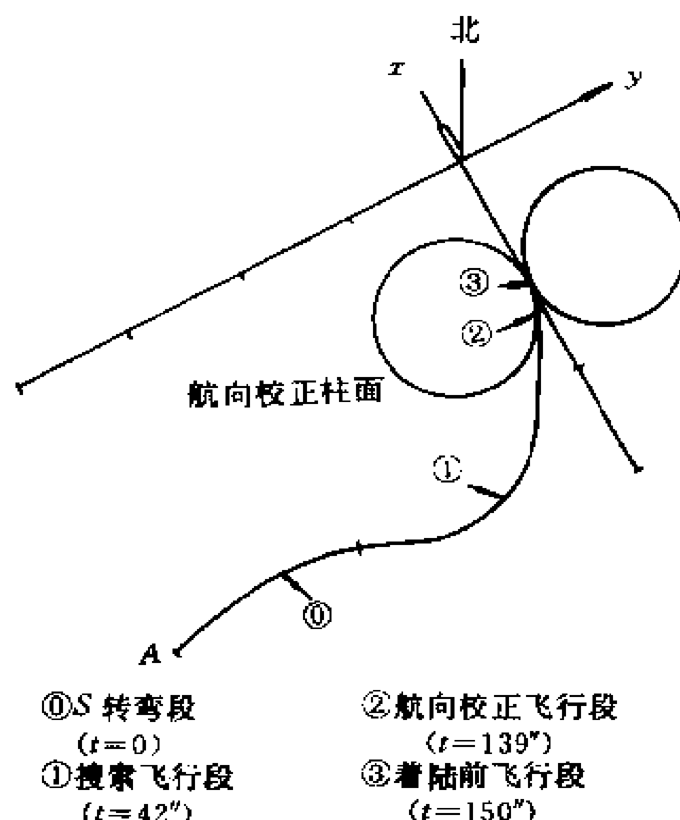


图6-74 TAEM 的分段示意图

S 转弯段 此段的特点在于更多的消耗能量,使飞行状态处在最大动压 $q_{max}=1465\text{kg/m}^2$ 及最大速度制动角 $(\delta_s)_{max}$.

搜索飞行段 此段飞行的目的是控制轨道器朝 HAC 飞行,以便于和 HAC 的某一切点接近,此时的特点是对纵向和横向都要进行控制。

航向校正飞行段 此段飞行的目的是控制轨道器沿 HAC 飞

行。也是利用动压和速度制动来控制轨道器的能量。为了形成沿航向校正柱面作转弯飞行，理论上讲轨道器应作 $\gamma=30°$ 的倾斜，当航向角等于20°时，可认为该段结束。

着陆前飞行段　此段飞行的目的是进一步校正航向，同时对高度和动压进行控制，以便满足自动着陆的要求。当飞行高度 $h=3048$米时，认为该段结束，也即 TAEM 段结束。

3. TAEM 段的制导方法

TAEM 段的制导是在能量—射程的平面上设置几条边界线(也可称转换曲线)，如图6-75所示。其中纵坐标为轨道器单位质量能量，横坐标为轨道飞行器预测的距离(射程)

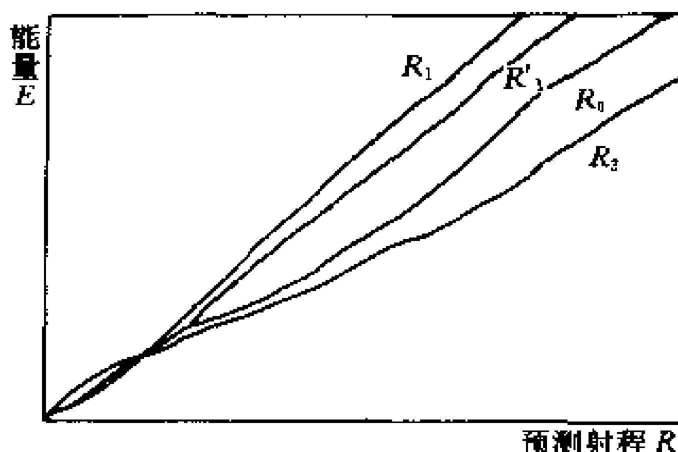


图6-75　TAEM 制导边界

①R_0　在中等动压和中等速度制动及在平静的大气中，理论上算出 $E\sim R$ 的关系，称为标准的 $E-R$ 曲线简称 R_0.

②R_1　设轨道飞行器初始时具有高能量，在大的能量消耗率下算出 $E-R$ 的关系，称为高能量的 $E-R$ 曲线简称 R_1.

③R_1'　在 R_0和 R_1之间设计一条 R_1'，它是作为 S 转弯段过渡到搜索飞行段而引进的。

④R_2 设轨道器初始时具有低能量，R_2线是要重新选择航向校正柱面的分界线。当能量状态低于R_2线时，给宇航员信号，要重新选择航向校正柱面的分界线。

(1)S转弯段的制导方法

当轨道飞行器处在能量—射程曲线R_1'之上，就认为轨道器处在S转弯段(一般保守的方法也应该让轨道器处在高能量状态，以便航天员有可能用多消耗能量来实施控制)。为了更有效地消耗能量，应该使轨道器滚动角$\gamma=50°$，以便作S形飞行，增加航行距离，并在q_{max}及δ_{smax}下实施飞行。在与R_1'曲线相交时，认为S转弯段结束，搜索飞行段开始，如图6-76所示。

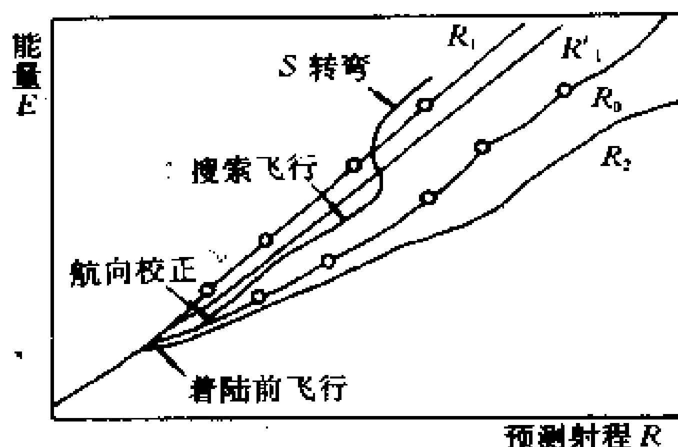


图6-76 TAEM的制导过程

(2)搜索飞行段的制导方法

搜索飞行段制导的目的就是使轨道器接近航向校正柱面。此时制导分成纵向和侧向两个通道。侧向制导的目的是消除航向偏差，使滚动角信号正比于航向偏角。

纵向制导的目的是通过动压和速度制动的控制使得轨道器接近航向校正柱面。

(3)航向校正飞行段的制导方法

航向校正飞行段制导的目的是使轨道器沿航向校正圆飞行。侧向制导的目的是使轨道飞行器沿航向校正柱面飞行,航向校正圆的半径为6000m,在标准情况下,滚动角 γ 为30°,而滚动角的命令为

$$\phi_c = (30 + G_1\Delta R + G_2\Delta \dot{R}) \tag{6-9-58}$$

其中 ΔR 为对航向校正柱面的偏差,G_1、G_2 为常数。纵向制导的目的是使轨道器的能量按标准情况变化,其制导方法同搜索飞行段一样。当航向角偏差(相对于最后的接近平面)小于20°时,认为航向校正飞行段结束。

(4)着陆前飞行段的制导方法

着陆前飞行段制导的目的是使轨道器的飞行状态参数满足自动着陆的要求,而着陆前对轨道飞行器的状态要求如前所述。为此,侧向制导的目的是保证航向误差角在10°之内。它的滚动信号可以根据侧向偏差的大小进行控制。

纵向制导是为了保证高度和速度满足自动着陆的要求。可通过保证动压和高度满足要求来使速度满足要求。高度的控制是通过升降副翼 δ_B 控制法向加速度来加以控制;动压的控制是通过速度制动 δ_r 来满足要求。

4. TAEM 的仿真

TAEM 制导系统最重要的是能够在各种情况下,例如有风干扰的情况下仍然能够正常地工作。为此应对各种情况,例如初始位置(相对于跑道)、不同的航向、不同的风场(顺风或逆风)和不同的干扰进行仿真,以便考核系统的适应能力。文献[38]曾对上述条件组合成23种情况进行了仿真,除了四种风速特大的情况,使动压(等效的速度)不合乎着陆要求外均满足自动着陆要求。

参 考 文 献

[1] 贾沛然，陈克俊，何力编著. 远程火箭弹道学. 长沙：国防科技大学出版社，1993

[2] 王希季，李颐黎等编著. 航天器进入与返回技术(上册). 北京：宇航出版社，1991

[3] 程国采编著. 四元数法及其应用. 长沙：国防科技大学出版社，1991

[4] 肖业伦编著. 飞行器运动方程. 北京：航空工业出版社，1987

[5] 赵汉元编. 大气飞行器姿态动力学. 长沙：国防科技大学出版社，1987

[6] 钱杏芳，张鸿端，林端雄编著. 导弹飞行力学. 北京：北京工业学院出版社，1987

[7] Allen，H. J，Eggers，A. J. A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds. NACA TN 4047 1957

[8] Chapman，D. R. An Approximate Analytical Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres. NASA TR R—11，1959

[9] Loh，W. H. T. Dynamics and Thermodynamics of Planetary Entry，Prentice—Hall. Inc. Englewood Cliffs，N. J. 1963

[10] B·B·安德雷耶夫斯基著. 宇宙飞行器降落地球动力学. 长沙：国防工业出版社，1957

[11] A·E·布赖森，何毓奇. 应用最优控制—最优化、估计、控制. 北京：国防工业出版社，1982

[12] Barbe，F. J. 弹道导弹弹头运动的解析解. JSR，1981

[13] 钱学森著. 星际航行概论. 北京：科学出版社，1963

[14] 宫锡芳. 最优控制问题的计算方法. 北京：科学出版社，1979

[15] 张毅等. 弹道导弹弹头再入参数的解析解. 国际弹道学会议(ICB). 南京. 1988

[16] 阮春荣著. 大气中飞行的最优轨迹. 北京：宇航出版社，1987

[17] 王国雄主编. 弹头技术(上). 北京：宇航出版社，1993

[18] 程国采编著. 弹道导弹制导方法与最优控制. 长沙：国防科技大学出版版

社，1987
[19] 陈克俊，赵汉元.一种适用于攻击地面固定目标的最优再入机动制导律.宇航学报，1994
[20] 赵汉元、陈克俊.再入机动弹头的速度控制.国防科技大学学报，1993，第二期
[21] B.H.列凡托夫斯基著.宇宙飞行力学基础.北京：国防工业出版社，1979
[22] B.埃特肯著.大气飞行动力学.科学出版社，1979
[23] 胡兆丰，何植岱，高浩编.飞行动力学—飞机的稳定性和操纵性.北京：国防工业出版社，1985
[24] 关世义.有控飞行力学在无人飞行器研制和使用中的作用.宇航学报，1995，第四期
[25] 杨嘉墀主编.航天器轨道动力学与控制.北京：宇航出版社，1995
[26] 南英，吕学富，陈士橹.航天器再入走廊及其计算方法.飞行力学，1993，第二期
[27] Zhao Hanyuan，Zhu Longgen. The Research of Reentry Guidance Law of the Manned Spacecraft and Numerical Simulation. AAS91－650，1991
[28] 赵汉元，谢晓全.载人飞船再入制导方法研究.宇航学报，1992，第二期
[29] 何力，赵汉元.载人飞船标准返回轨道设计.国防科技大学学报，1996，第三期
[30] 汤国建，赵汉元.再入纵向制导最佳反馈增益系数规律的研究.中国1995飞行力学学术年会论文集，1995
[31] 陈克俊.飞船返回再入制导方法研究.中国1995飞行力学学术年会论文集，1995
[32] 冯书兴，张守信.载人航天器返回舱落点预报及精度分析.长沙：国防科技大学出版社，1996
[33] 赵汉元，陈克俊，汤国建，郭振云.飞行器再入时GNC系统一体化仿真研究.飞行力学，1997，第三期
[34] 赵汉元.航天器再入制导方法综述.航天控制，1994，第一期
[35] 赵汉元，陈克俊，郭振云，程国采.再入机动飞行器数学仿真研究.宇航

学报,1997,第一期

[36] 赵汉元,航天飞机轨道飞行器末端飞行时的制导方法.运载火箭与返回技术,1988,第三期

[37] Jon C. Horpold and Clande A. Graves, Shuttle Entry Guidance. The Journal of the Astronautical Sciences, Vol, XXVII, No. 3, 239—268, July—September, 1979

[38] Kraemer, J. W, and Ehiers, H. L. Shuttle Orbiter Guidance System for the Terminal Flight Phase. IFAC 75 PART IVC